Kongruenzgeometrie
mit einem vollständigen logischen Aufbau

Inhaltsverzeichnis

Kongruenzgeometrie
mit einem vollständigen logischen Aufbau

Einleitung

In vielen Schulbüchern, die Geometrie behandeln, findet man manchmal logische Lücken.
Außerdem werden mathematische Beweise oft schlecht erklärt, stark verkürzt oder weggelassen.
So wird ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge erschwert.

Dagegen soll in dieser Arbeit ein großer Teil der Schulgeometrie streng logisch aufgebaut werden, fast so, wie es in der Hochschulmathematik üblich ist.
Es soll vor allem deutlich werden, wie ein mathematischer Beweis funktioniert.
Dabei wird auch erläutert, wie ein „normaler Mensch" einen Beweis erfindet.
Auf Übungsaufgaben wird weitgehend verzichtet.
Diese findet man bei Bedarf in allen Schulbüchern, die Schulgeometrie behandeln.

Teile dieser Arbeit sind geeignet
1) zur individuellen Förderung von einzelnen Schülern oder Gruppen von Schülern.
2) für den Unterricht in geeigneten Schulklassen.
3) als Anregung für Facharbeiten
4) zur Wiederholung der (ebenen) Schulgeometrie.
5) für mathematisch interessierte Menschen jeden Alters.
6) Da hier ein besonderer Wert auf die logischen Strukturen gelegt wird, kann man mit Hilfe dieser Arbeit sowohl große Teile der ebenen Geometrie als auch das logische Denkvermögen erlernen.

Der mathematische Beweis :
Der mathematische Beweis wurde im alten Griechenland „erfunden". Es gab dort einige Menschen, die viel Zeit hatten, da Sklaven für sie arbeiteten. Es kam in Mode, dass sich viele dieser Privilegierten mit Geometrie beschäftigten. Außerdem gab es im alten Griechenland demokratische Strukturen. Deshalb konnte die Frage, ob eine Aussage richtig oder falsch ist, nicht autoritär entschieden werden. So wurde eine Vorstufe des heutigen mathematischen Beweises erfunden.
Heute ist es international üblich, dass eine mathematische Behauptung nur dann akzeptiert wird, wenn man sie beweisen kann. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Behauptung von einem Studenten oder einem angesehenen Wissenschaftler formuliert wurde.

Einführung

Mit folgenden logischen „Bausteinen" soll hier gearbeitet werden:

Axiome: Das sind sinnvolle Aussagen, die (bei diesem Aufbau) nicht bewiesen werden können.

Definitionen: In einer Definition bekommen Dinge oder Eigenschaften von Dingen einen Namen.

Sätze: Das sind Aussagen, die bewiesen werden müssen.

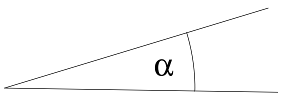
Beweise: In einem Beweis werden Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Sätze logisch miteinander verbunden.

Bemerkungen: Diese erklären Zusammenhänge und bereiten auf neue Definitionen und Sätze vor.

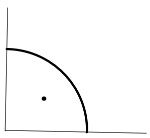
Kapitel 1 : Notwendiges Grundwissen

Bevor man mit dem streng logischen Aufbau der Schulgeometrie beginnt, benötigt man natürlich **Grundkenntnisse**:
Man sollte "mit Buchstaben rechnen" können.
Man muss wissen,
was Punkte, Geraden, Strecken, Längen, Kreise und Winkel sind.
Punkte werden mit großen Buchstaben bezeichnet,
Geraden und Kreise mit kleinen Buchstaben.
Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Diese sind :
α(alpha), β(beta), γ(gamma), δ(delta), ζ(zeta), η(eta), ϑ(theta), ι(jota), κ(kappa), λ(lambda), μ(my), ν(ny), ξ(xi), o(omikron), π(pi), ρ(rho), σ(sigma), τ(tau), υ(ypsilon), φ(phi), χ(chi), ψ(psi), ω(omega).

Das Zeichen Δ bedeutet Dreieck.
AB ist die Gerade, auf der die Punkte A und B liegen.
$\overline{AB}$ ist die Strecke von A nach B.
$|\overline{AB}|$ ist die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

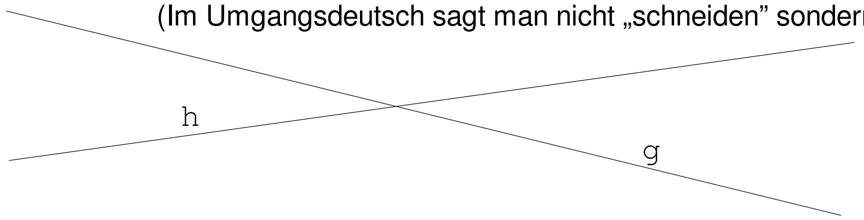


ist der Winkel α .


ist das Zeichen für einen rechten Winkel.

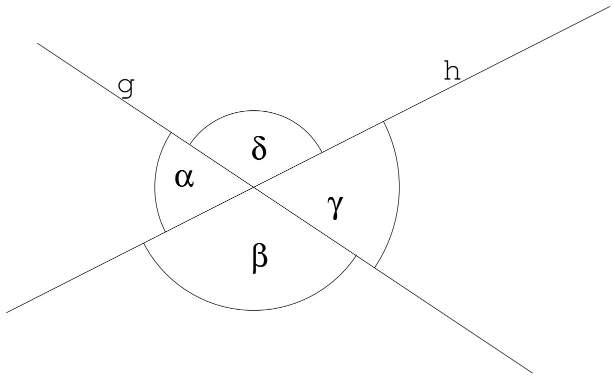
Kapitel 2 : Die Geradenkreuzung

Definition 2.1 : Zwei Geraden, die sich schneiden, bilden eine **Geradenkreuzung.**
(Im Umgangsdeutsch sagt man nicht „schneiden" sondern „kreuzen".)



Bemerkung 2.2 : *Bei jeder Geradenkreuzung hat man 4 Winkel.*
Diese sollen hier mit α, β, γ und δ bezeichnet werden.

Zeichnung 2.3 :



Definition 2.4 Bei einer Geradenkreuzung werden
zwei nebeneinander liegende Winkel **Nebenwinkel** genannt und
zwei einander gegenüber liegende Winkel **Scheitelwinkel**.

Bemerkung 2.5 *Scheitelwinkel sind hier α und γ, β und δ.*
Nebenwinkel sind α und β, β und γ, γ und δ, δ und α.

Satz 2.6 Nebenwinkel haben zusammen immer 180° .

Axiom 1

Man kann den Satz 2.6 auch anders formulieren:
Wenn zwei Winkel Nebenwinkel sind, **dann** haben sie zusammen 180°.

Bemerkung 2.7 *Bei diesem Aufbau der Kongruenzgeometrie kann man den Satz 2.6 nicht beweisen. Da er aber anschaulich richtig ist, wählt man ihn als Axiom 1.*

Bemerkung 2.8 ***Bei jedem Beweis darf man die Aussage, die beim Satz hinter „wenn" steht benutzen.***
Die Aussage, die hinter „dann" steht, muss bewiesen werden.

Bemerkung 2.9 Eine „wenn-dann-Aussage" kann man meistens nicht umkehren.

Denn vertauscht man bei Satz 2.6 „wenn" und „dann" so erhält man:
Wenn zwei Winkel zusammen 180 $^\circ$ *haben, dann sind sie Nebenwinkel.*
Diese Aussage ist offensichtlich falsch, denn
zwei rechte Winkel in den Ecken eines Zimmers haben zwar zusammen 180 $^\circ$*,*
aber sie sind keine Nebenwinkel.

Bemerkung 2.10 *Wenn man Scheitelwinkel misst, stellt man fest, dass sie gleich groß sind. So kommt man zu dem nächsten Satz:*

Satz 2.11 Scheitelwinkel sind gleich groß.

Oder, anders formuliert:

Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, **dann** sind sie gleich groß.

Beweis: Zunächst benutzt man die Zeichnung 2.3 , weil dort Scheitelwinkel vorkommen. **Es soll gezeigt werden, dass** $\alpha = \gamma$ **ist.**
Bis jetzt hat man nur einen Satz, den man benutzen darf, nämlich den Satz 2.6 über Nebenwinkel. Also benutzt man ihn :

2.12 $\alpha + \beta = 180^\circ$, denn α und β sind Nebenwinkel.
2.13 $\gamma + \beta = 180^\circ$, denn β und γ sind Nebenwinkel.

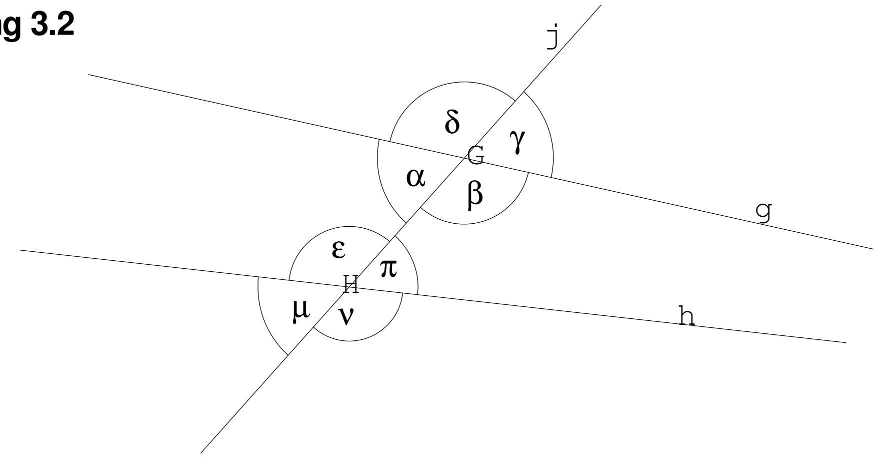
Subtrahiert man 2.13 von 2.12 , so erhält man $\alpha - \gamma = 0^\circ$ und damit $\alpha = \gamma$.
Das war zu zeigen.

Aufgabe 2.14 *Beweise, dass* $\beta = \delta$ *ist.*

Kapitel 3 : Die Doppelkreuzung, parallele Geraden

Definition 3.1 Werden zwei Geraden von einer dritten Geraden geschnitten, so hat man eine **Doppelkreuzung.**

Zeichnung 3.2

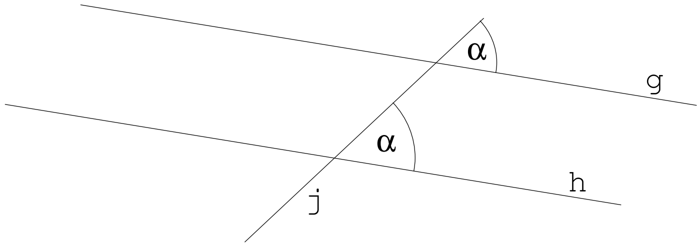


Definition 3.3 Werden die Geraden g und h von der Geraden j in den Punkten G und H geschnitten, so entstehen in G und H je 4 Winkel. Zwei Winkel heißen **Stufenwinkel**, wenn sie diese 3 Bedingungen erfüllen:
1) Ein Winkel liegt bei G und der Andere bei H.
2) Beide Winkel liegen auf der selben Seite von j.
3) Ein Winkel liegt zwischen g und h, der Andere nicht.

Bemerkung 3.4 *In der Zeichnung 3.2 gibt es 4 Paare von Stufenwinkeln. Diese sind* α *und* μ *,* β *und* ν *,* γ *und* π *,* δ *und* ε *.*

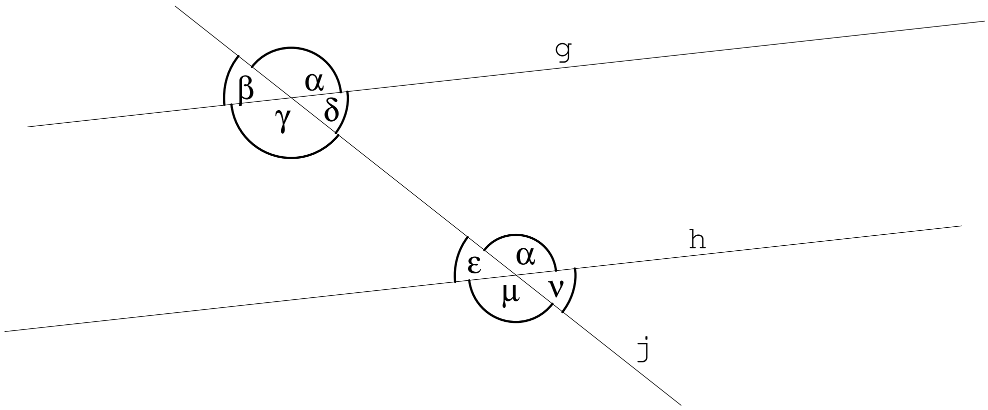
Bemerkung 3.5 *Während Scheitelwinkel und Nebenwinkel Beziehungen zwischen Winkeln an einer Geradenkreuzung herstellen, liefern Stufenwinkel Beziehungen zwischen Winkeln, die weit voneinander entfernt sein können.*

Definition 3.6 Zwei Geraden heißen **parallel** zu einander, wenn es bei ihnen **mindestens** ein Paar von gleich großen Stufenwinkeln gibt.



Bemerkung 3.7 Man kann Satz 3.8 und Aufgabe 3.11 weglassen. Dadurch wird das Verständnis der folgenden Seiten nicht beeinträchtigt.

Satz 3.8 Sind bei einer Doppelkreuzung die Stufenwinkel α gleich groß, dann sind bei dieser Doppelkreuzung auch die anderen Stufenwinkel jeweils gleich groß, also $\beta = \varepsilon$ und $\gamma = \mu$ und $\delta = \nu$.



Bew.: **1) Zu zeigen ist, dass $\beta = \varepsilon$.**

α und β sind Nebenwinkel. Also gilt wegen Axiom 1

3.9 $\alpha + \beta = 180^\circ$.

α und ε sind auch Nebenwinkel. Also ist

3.10 $\alpha + \varepsilon = 180^\circ$.

Subtrahiert man 3.10 von 3.9, so erhält man $\beta - \varepsilon = 0^\circ$ und damit $\beta = \varepsilon$. Das war zu zeigen.

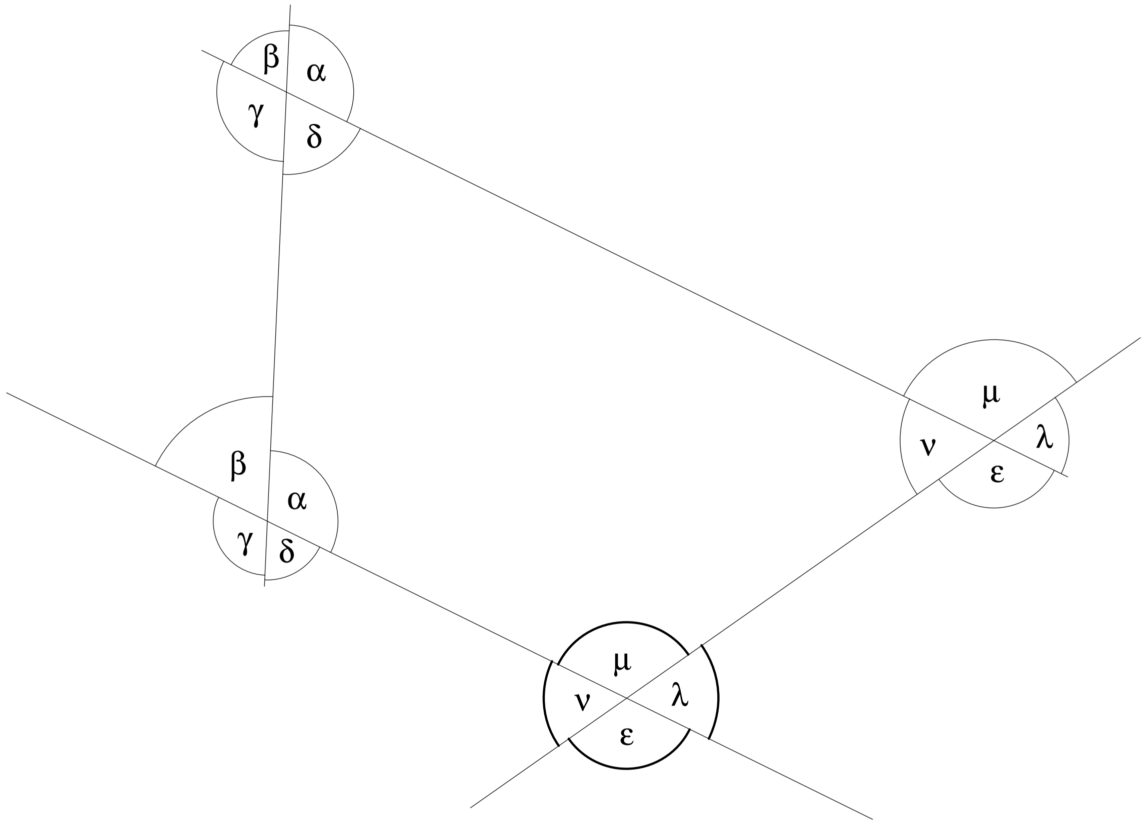
2) Zu zeigen ist auch noch, dass $\gamma = \mu$ und
3) zu zeigen ist, dass $\delta = \nu$.

Aufgabe 3.11 Führe die Beweise für die Beweisteile 2) und 3) von Satz 3.8 .

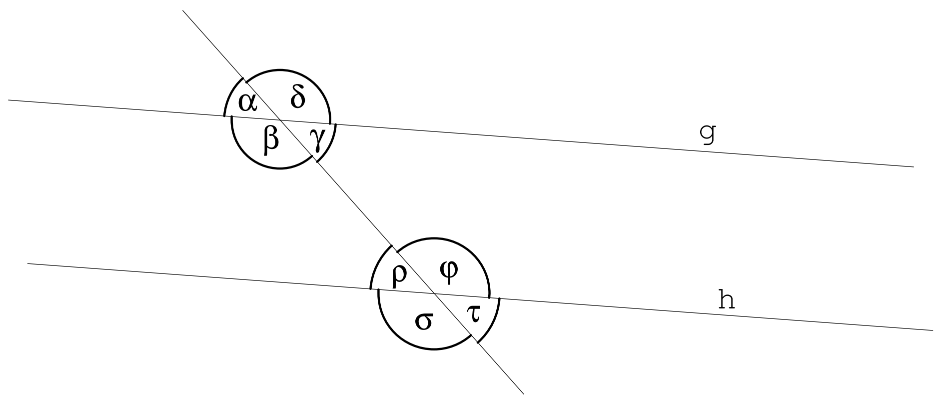
Für den Aufbau der Geometrie benötigt man noch

Axiom 2 Wenn zwei Geraden parallel sind, dann sind bei ihnen **alle** Stufenwinkel jeweils gleich groß.

(In der Zeichnung haben gleich große Winkel gleiche Namen.)



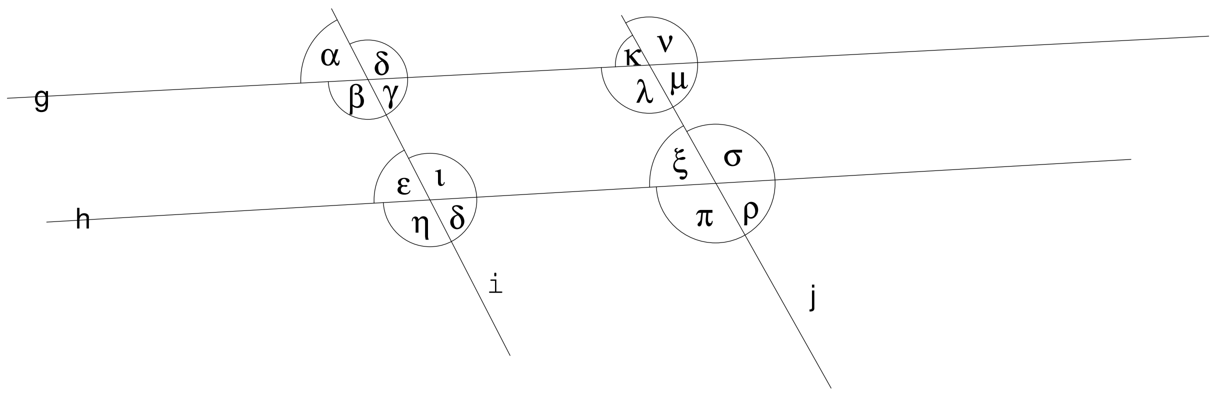
Aufgabe 3.12 *Es ist g parallel zu h und* $\alpha = 70^{o}$.
Bestimme die restlichen Winkel.
Begründe mit Definitionen und Sätzen.



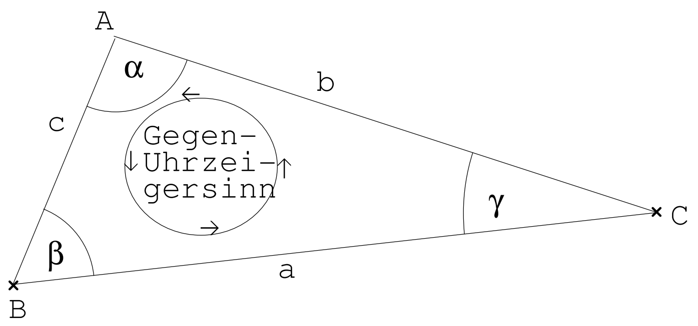
Bemerkung 3.13 **Bei allen Definitionen kann man "wenn-dann-Aussagen" umkehren.**

Bei der Definition 3.6 bedeutet das:
Wenn zwei Geraden parallel sind, dann gibt es bei ihnen zwei gleich große Stufenwinkel
und
wenn zwei Stufenwinkel gleich groß sind, dann sind zwei Geraden parallel.

Aufgabe 3.14 Die Geraden g und h sind zueinander parallel, ebenso i und j , und $\alpha = 60^\circ$. Bestimme die restlichen Winkel und begründe mit Definitionen und Sätzen.



Definition 3.15 Verbindet man drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, durch Geraden, so erhält man ein **Dreieck**. Die drei Eckpunkte werden im Gegenuhrzeigersinn z.B. mit A, B, C bezeichnet.
Dann heißen die zugehörigen Winkel α, β, γ und die Seiten a, b , c.
Dabei liegt a gegenüber von A, b gegenüber von B und c gegenüber von C.

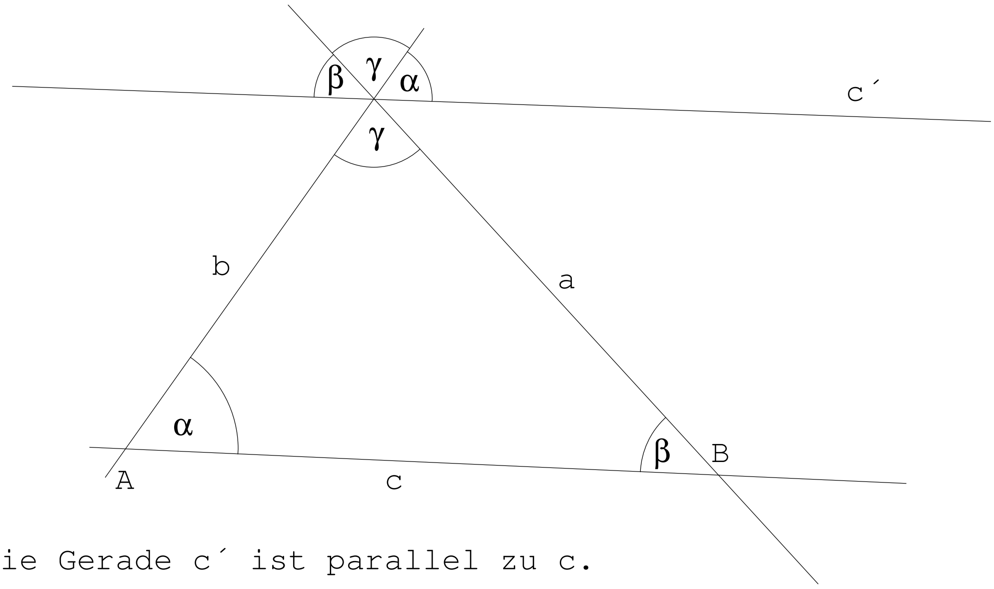


Bemerkung 3.16 Misst man die drei Innenwinkel α, β, γ eines beliebigen Dreiecks, so erhält man (etwa) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Dies führt zum

Satz 3.17 In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel = 180°.

Beweis: Keiner der bisher bekannten Sätze kann eine Beziehung zwischen den Innenwinkeln im Dreieck herstellen, da die Innenwinkel nicht an einer gemeinsamen Geradenkreuzung liegen. Aber bei einer Doppelkreuzung mit parallelen Geraden gibt es eine Beziehung zwischen Winkeln, die weit voneinander entfernt sind. Also zeichnet man bei dem Dreieck eine Parallele zu einer Seite ein und erhält so eine Doppelkreuzung.



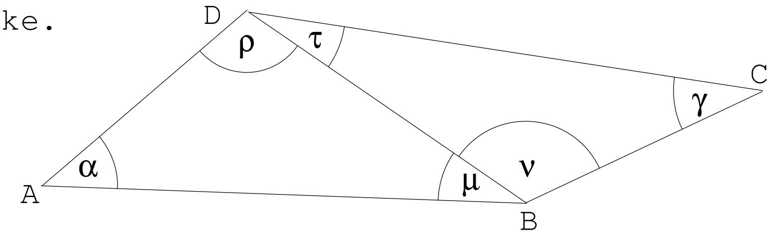
Die Gerade c´ ist parallel zu c.
Wegen des Axioms 2 hat man dann die jeweils gleich großen Stufenwinkel α bzw. β.
Die beiden Scheitelwinkel γ sind wegen Satz 2.11 auch gleich groß. Oberhalb von c´ hat man dann die Nebenwinkel $(\beta + \gamma)$ und α.
Wegen Satz 2.6 über Nebenwinkel ist dann :
$(\beta + \gamma) + \alpha = 180^\circ$. Das kann man umstellen zu
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 3.18 *Bei einem Dreieck ist $\alpha=30^\circ$ und $\beta=80^\circ$. Wie groß ist γ ?*

Bem. 3.19 *Zwei Winkel dürfen nur dann mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet werden, wenn sie gleich groß sind. Wenn dagegen die Gleichheit von zwei Winkeln bewiesen werden soll, müssen diese zunächst verschiedene Bezeichnungen tragen, z.B. α und β. Dann muss bewiesen werden, dass $\alpha = \beta$. Für die Bezeichnung von Längen gelten die gleichen Regeln.*

Satz 3.20 In jedem Viereck ist die Summe der Innenwinkel 360°.

Beweis: Bis jetzt ist ein Satz über Dreiecke bekannt.
Also zerlegt man das Viereck durch eine Hilfsgerade in zwei Dreiecke.



Wegen Satz 3.17 (über die Innenwinkel im Dreieck) gilt

$$\alpha + \mu + \rho = 180^\circ \quad \text{und}$$
$$\gamma + \tau + \nu = 180^\circ.$$

Addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man
$\alpha + \mu + \rho + \gamma + \tau + \nu = 360^\circ$.
Diese Gleichung kann man umstellen:

$\alpha + \mu + \nu + \gamma + \tau + \rho = 360^\circ$.

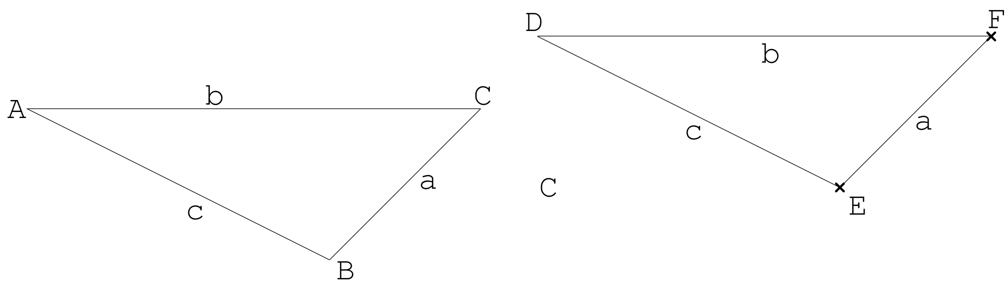
Man kann geeignete Klammern setzen:
$\alpha + (\mu + \nu) + \gamma + (\tau + \rho) = 360^\circ$.
Hier steht, dass die Summe der 4 Innenwinkel im Viereck 360° ist .
Das war zu zeigen.

Kapitel 4 : Die Kongruenzsätze

Definition 4.1 Zwei Dreiecke heißen **kongruent**, wenn bei ihnen alle Seitenlängen und Winkel übereinstimmen.

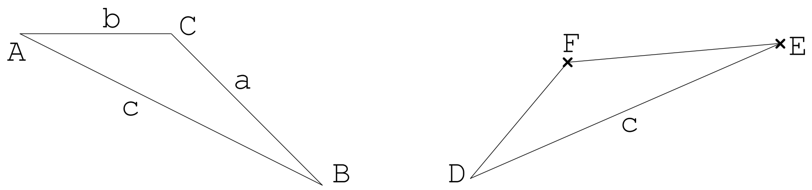
Kongruente Dreiecke kann man so übereinanderlegen, dass sie sich vollständig überdecken.

Zeichnung 4.2



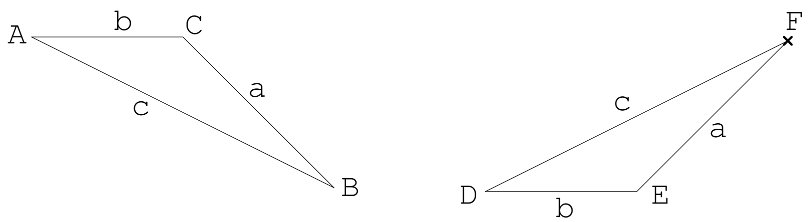
Die Dreiecke ΔABC und ΔDEF sind kongruent.

Zeichnung 4.3



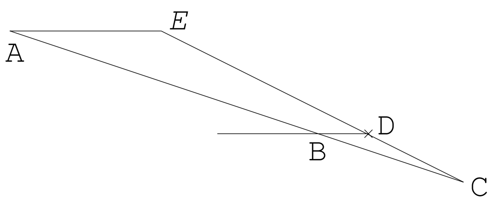
Die Dreiecke ΔABC und ΔDEF sind nicht kongruent.

Zeichnung 4.4



Die Dreiecke ΔABC und ΔDEF sind kongruent. Dabei haben die Dreiecke unterschiedlichen Drehsinn.

Zeichnung 4.5

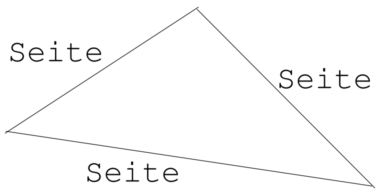


Die Dreiecke ΔBCD und ΔACE sind nicht kongruent. Sie haben zwar gleiche Innenwinkel aber unterschiedliche Seitenlängen.

Bemerkung 4.6 *Da man die (so genannten)* ***Kongruenzsätze*** *bei diesem Aufbau der Geometrie nicht beweisen kann, sind sie* ***Axiome.***
Anschaulich kann man erkennen, dass die Kongruenzsätze offensichtlich richtig sind.

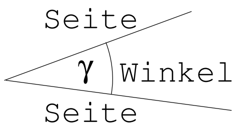
Satz 4.7 (Die 4 Kongruenzsätze)
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in

(SSS) 3 Seiten-Längen übereinstimmen
Axiom 3



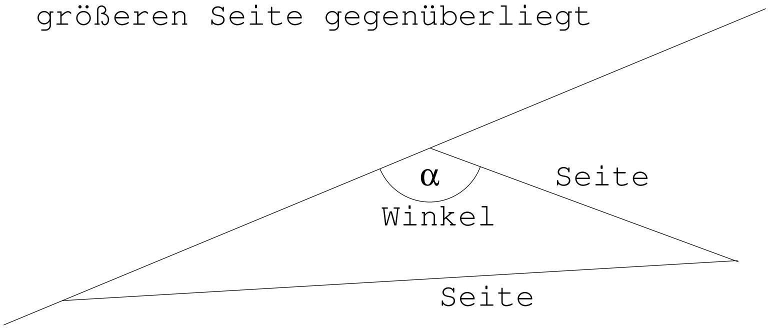
oder in

(SWS) 2 Seiten-Längen und eingeschlossenem Winkel übereinstimmen
Axiom 4



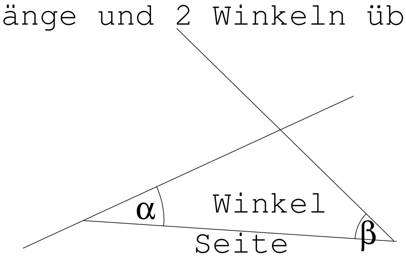
oder in

(SsW) 2 Seiten-Längen und dem Winkel übereinstimmen, der der größeren Seite gegenüberliegt
Axiom 5



oder in

(WSW) 1 Seiten-Länge und 2 Winkeln übereinstimmen.
Axiom 6



od

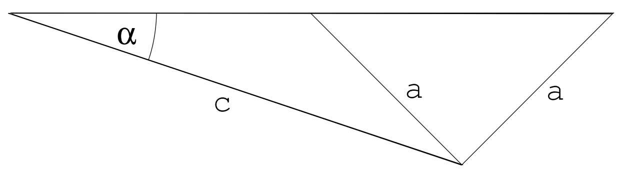
Bemerkung 4.8 : *Man kann den Kongruenzsatz* ***(WSW)*** *auch als* ***(WWS)*** *bezeichnen, denn wenn 2 Dreiecke in 2 Winkeln übereinstimmen, so haben sie wegen Satz 3.17 auch den dritten Winkel gemeinsam.*

Bemerkung 4.9 : *Ein Dreieck hat 5 wesentliche Größen, nämlich 3 Seiten und 2 Winkel. Deshalb kann man die* ***Kongruenzsätze zusammenfassen:***

2 Dreiecke sind ***kongruent****, wenn sie in 3 der 5 wesentlichen Dreiecksgrößen übereinstimmen.*
In diesem Falle stimmen die beiden Dreiecke in allen Seiten und Winkeln überein.

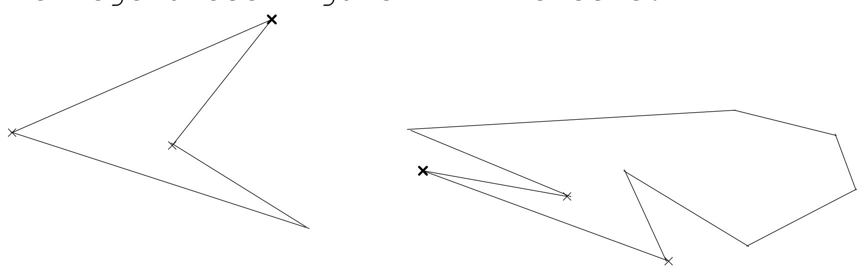
Dabei gibt es nur ***eine Ausnahme:***
2 Dreiecke müssen ***nicht kongruent*** *sein, wenn sie in 2 Seiten und 1 Winkel übereinstimmen und wenn der Winkel der kleineren Seite gegenüberliegt.*

Bei diesem Beispiel gibt es zu a, c und α *2 verschiedene Dreiecke.*



Bemerkung 4.10 : *Da man alle Vierecke. Fünfecke, Sechsecke ... in Dreiecke zerlegen kann, sind Aussagen über Dreiecke besonders wichtig.*

Aufgabe 4.11 : *Zerlege diese Figuren in Dreiecke.*

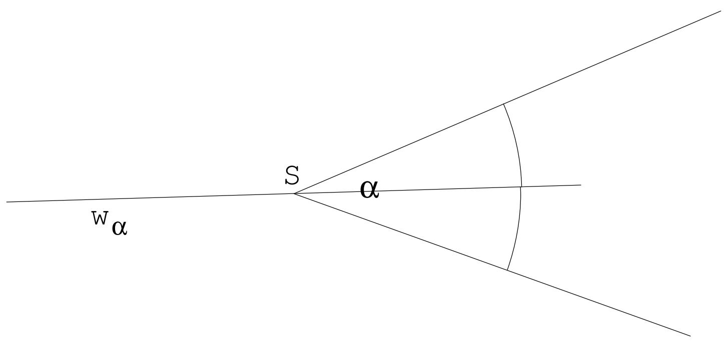


Bemerkung 4.12 : *Auf den folgenden Seiten soll Bemerkung mit Bem. abgekürzt werden, Beweis mit Bew. und Definition mit Def.* .

Bem.5.1 : In diesem Kapitel wird schon sehr gut deutlich, wie man die Kongruenzsätze anwenden kann. Außerdem wird erklärt, wie man Konstruktionen beschreibt.

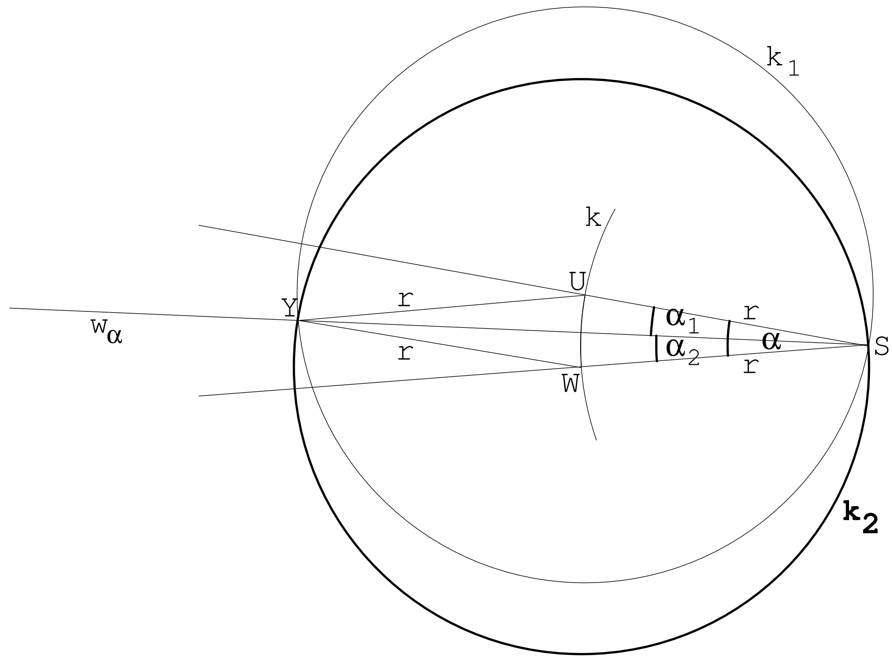
Wenn man aber von diesem Kapitel nur
Def.5.2 , Def.5.9 , Def.5.14 und
Satz 5.12a und Satz 5.12b
liest, kann man die folgenden Kapitel verstehen.

Def.5.2 : Die **Winkelhalbierende w_α** des Winkels α ist diejenige Gerade, welche den Winkel α halbiert und den Scheitelpunkt S des Winkels α enthält.



Satz 5.3 (über die Konstruktion der Winkelhalbierenden)
Die Winkelhalbierende w_α des Winkels α erhält man durch folgende Konstruktion:

a) Man zeichnet einen Kreis k um den Scheitelpunkt S des Winkels α mit einem beliebigen Radius r .
b) Der Kreis k schneidet die beiden Schenkel des Winkels α in 2 Punkten. Diese nennt man U und W.
c) Man zeichnet einen Kreis k_1 um U mit dem Radius r und einen Kreis k_2 um W mit dem selben Radius r.
d) Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in 2 Punkten. Der eine ist S, den andern nennt man Y.
e) Die gesuchte Winkelhalbierende w_α ist dann die Gerade SY .



Bew : Da die oben konstruierte Gerade SY den Punkt S enthält,
muss nur noch gezeigt werden, dass $\alpha_1 = \alpha_2$ ist.
Für den Beweis können die Kongruenzsätze benutzt werden.
Diese gelten nur für Dreiecke.
Es bietet sich an, die Dreiecke ΔSUY und ΔSYW
zu untersuchen, da in diesen Dreiecken die Winkel α_1 und
α_2 vorkommen. Die beiden Dreiecke sind wegen (SSS)
kongruent, denn sie haben $|\overline{SY}|$, $|\overline{US}| = |\overline{WS}| = r$ und
$|\overline{UY}|=|\overline{WY}|=r$ gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\alpha_1 = \alpha_2$.

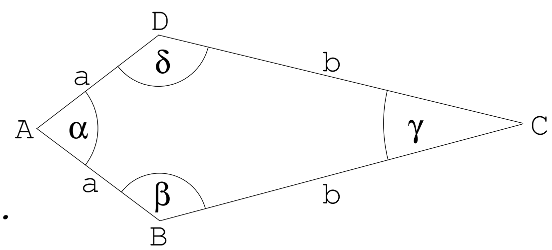
Das war zu zeigen.

Bem. 5.4 : *Im Satz 5.3 wird eine Konstruktion beschrieben. Eine **Konstruktionsbeschreibung** funktioniert so : Man zeichnet Punkte, Geraden oder Kreise und gibt ihnen Namen. Eine Gerade wird bestimmt durch 2 Punkte, durch die sie verläuft, oder durch 1 Punkt und 1 Richtung(z.B. parallel zu, orthogonal zu,...). Ein Kreis wird bestimmt durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius r.*
Die Schnittpunkte von Geraden und Kreisen erhalten Namen. Diese Punkte legen wieder Geraden oder Kreise fest, die auch Namen erhalten.
Dieses Verfahren führt man so lange durch, bis man diejenige geometrische Größe erhält, deren Konstruktion beschrieben werden soll.

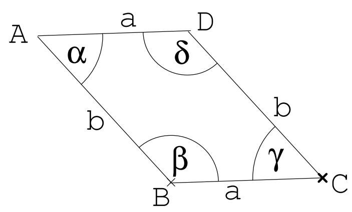
Aufgabe 5.5 : *Zeichne ein großes Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und den Winkeln α, β, γ. Konstruiere die Winkelhalbierenden w_α und w_β und beschreibe die Konstruktionen.*

Aufgabe 5.6 : *Halbiere einen halbierten Winkel noch einmal.*

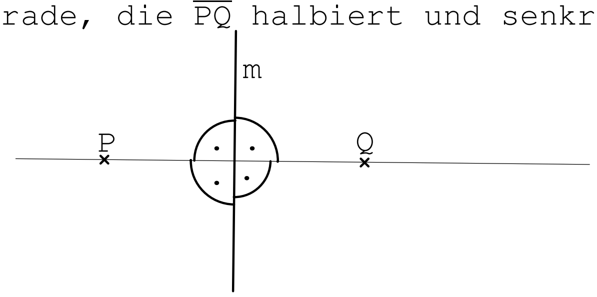
Aufgabe 5.7 : *Welche Winkel sind gleich groß ? Beweise Deine Vermutung! Zeichne eine Hilfslinie ein.*



Aufgabe 5.8 : *Welche Winkel sind gleich groß ? Beweise Deine Vermutung ! Zeichne Hilfslinien ein.*

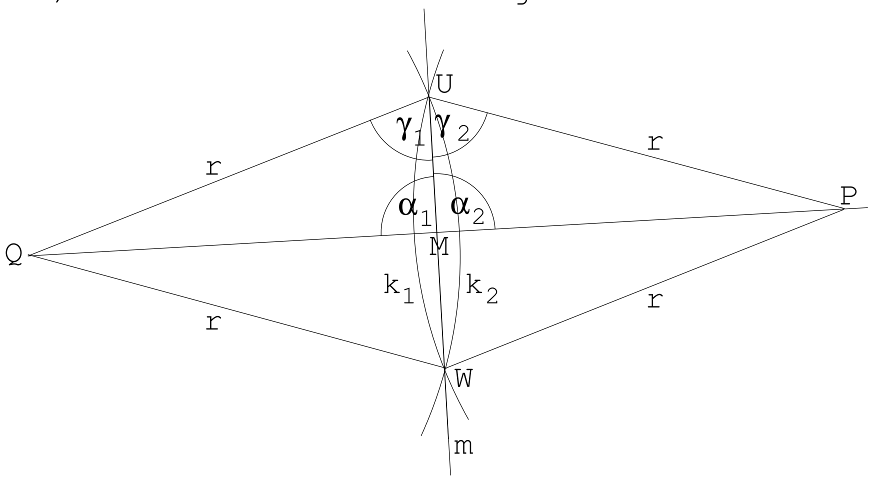


Def 5.9 : Die **Mittelsenkrechte m** einer Strecke $\overline{PQ}$ ist diejenige Gerade, die $\overline{PQ}$ halbiert und senkrecht zu $\overline{PQ}$ ist.



Satz 5.10 (über die Konstruktion einer Mittelsenkrechten)
Die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{PQ}$ erhält man durch folgende Konstruktion:

a) Man zeichnet einen Kreis k_1 um P mit einem beliebigen Radius r (der nicht zu klein sein darf) und einen Kreis k_2 um Q mit demselben Radius r.
b) Die beiden Schnittpunkte von k_1 und k_2 werden U und W genannt und der Schnittpunkt von UW und PQ heißt M .
c) Die Gerade UW ist die gesuchte Mittelsenkrechte m.



Bew. : Hier müssen zwei Gleichungen bewiesen werden:
I) $|\overline{PM}| = |\overline{QM}|$ und II) $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$.

Da in I) und II) Längen und Winkel vorkommen, bieten sich die Kongruenzsätze an. Diese gelten nur für Dreiecke.
In den Dreiecken ΔPUM und ΔQMU kommen zwar die Strecken $|\overline{PM}|$, $|\overline{QM}|$ und die Winkel α_1 und α_2 vor, aber man kennt von diesen Dreiecken nur die 2 gemeinsamen Längen $|\overline{PU}| = |\overline{QU}| = r$ und $|\overline{MU}|$. Damit kann man keinen Kongruenzsatz anwenden, weil die 3.Gleichheit fehlt.
Diese fehlende Gleichheit kann man aber aus anderen kongruenten Dreiecken gewinnen:
Das Dreieck ΔUQW ist wegen (SSS) kongruent zum Dreieck Dreieck ΔUWP , denn beide Dreiecke haben $|\overline{UW}|$, $|\overline{QW}| = |\overline{PW}| = r$ und $|\overline{PU}| = |\overline{QU}| = r$ gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\gamma_1 = \gamma_2$.
Damit hat man die fehlende Gleichheit bei den Dreiecken ΔQMU und ΔPUM gefunden. Jetzt kann man die Kongruenz der Dreiecke ΔQMU und ΔPUM (SWS) nachweisen, denn sie haben $|\overline{MU}|$, $\gamma_1 = \gamma_2$ und $|\overline{QU}|=|\overline{PU}|=r$ gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $|\overline{QM}| = |\overline{PM}|$.
Das war wegen I) zu zeigen.
Außerdem gilt wegen dieser Kongruenz auch $\alpha_1 = \alpha_2$. Die Winkel α_1 und α_2 sind Nebenwinkel. So gilt $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$. Aus beiden Gleichungen erhält man $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$. **Das war wegen II) zu zeigen.**

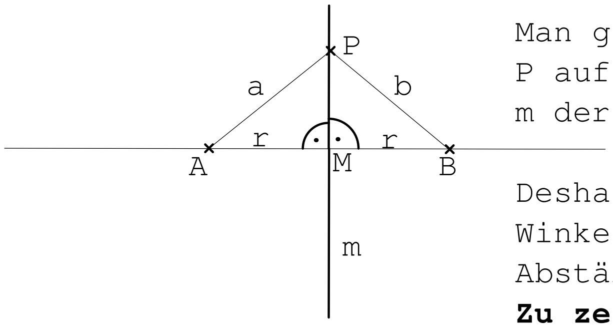
Bem. 5.11 *In Bem. 2.9 wurde gezeigt, dass man eine* ***wenn-dann-Aussage*** *oft nicht* ***umkehren*** *kann. Aber die Aussage von Satz 5.12,a) lässt sich umkehren.*
So erhält man die Aussage von Satz 5.12,b) .

Satz 5.12

a) Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ liegt, dann hat P von A und B den gleichen Abstand.

b) Wenn ein Punkt P von zwei Punkten A und B den gleichen Abstand hat, dann liegt P auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.

Bew. a)



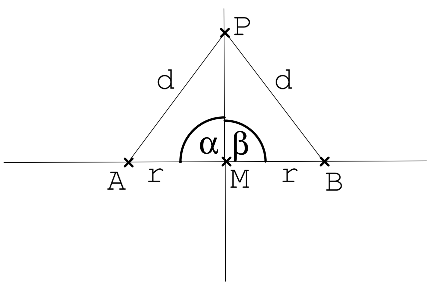
Man geht davon aus, dass P auf der Mittelsenkrechten m der Punkte A und B liegt.

Deshalb hat man die rechten Winkel und die gleichen Abstände r.

Aufgabe: **Zu zeigen bleibt, dass a=b** .

Lösung: Die Kongruenzsätze liefern Aussagen über Längen.
Die Kongruenzsätze gelten nur für Dreiecke. Deshalb wurden die Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ eingezeichnet.
Die Dreiecke ΔAMP und ΔBPM sind wegen (SWS) kongruent, denn sie haben r, den rechten Winkel und $|\overline{PM}|$ gemeinsam. Wegen dieser Kongruenz ist a = b.
Das war zu zeigen.

Bew. b)



Man geht jetzt davon aus, dass der Punkt P von den Punkten A und B den gleichen Abstand d hat. Man legt den Punkt M in die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Damit ist der Abstand $|\overline{AM}| = |\overline{BM}| = r$.
Zu zeigen bleibt, dass die Gerade PM die Mittelsenkrechte der Punkte A und B ist. Da M in die Mitte der Strecke $\overline{AB}$ gelegt wurde, bleibt nur noch

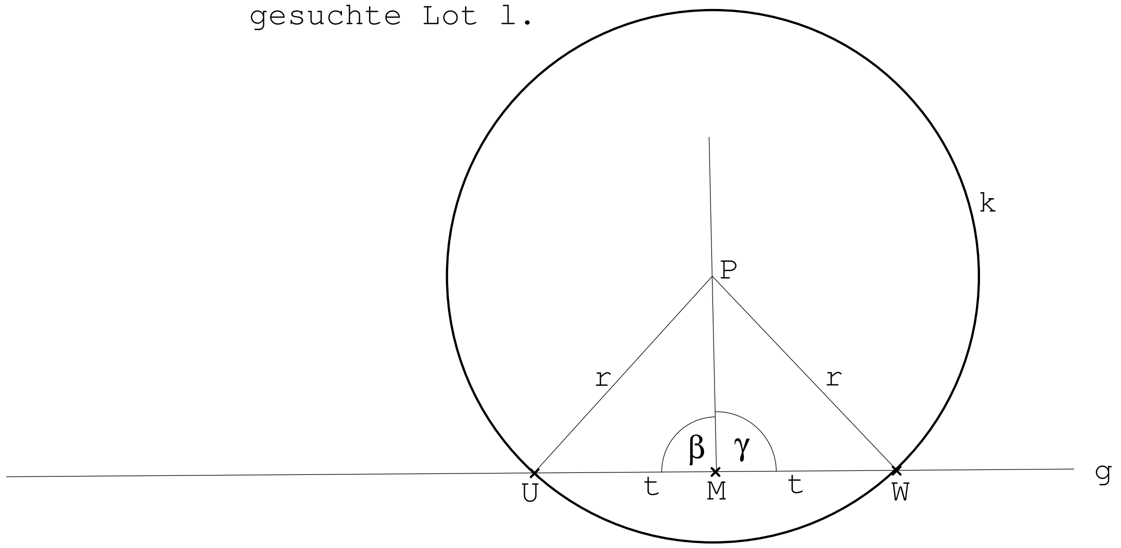
Aufgabe: **zu zeigen, dass $\alpha = \beta = 90^\circ$ ist.**

Lösung: Die Dreiecke ΔAMP und ΔBPM sind wegen (SSS) kongruent, denn sie haben r, d und $|\overline{MP}|$ gemeinsam.

5.13 Wegen dieser Kongruenz ist $\alpha = \beta$.
Außerdem sind α und β Nebenwinkel. Wegen Satz 2.6 gilt dann $\alpha + \beta = 180^\circ$. Zusammen mit 5.13 erhält man $\alpha = \beta = 90^\circ$.
Das war zu zeigen.

Def.5.14 Das **Lot l** von einem Punkt P auf eine Gerade g ist diejenige Gerade, die auf g senkrecht steht und die den Punkt P enthält.t.

Satz 5.15 (über die Konstruktion des Lotes)
Das Lot l von einem Punkt P auf eine Gerade g erhält man durch folgende Konstruktion:
a) Man zeichnet einen Kreis k um P mit einem beliebigen (aber genügend großen) Radius r.
b) Der Kreis k schneidet die Gerade g in zwei Punkten. Man nennt diese U und W.
c) Die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{UW}$ ist das gesuchte Lot l.



Bew.: Die Beweisskizze macht Schwierigkeiten.
Denn zeichnet man P auf der Mittelsenkrechten m ein, so ist m das gesuchte Lot. Dann hat man die Behauptung im Beweis vorausgesetzt und es ist kein Beweis mehr möglich.
Zeichnet man aber P nicht auf m ein, so ist die Zeichnung falsch und es ist kein Beweis möglich.
Deshalb geht man anders vor:
Man zeichnet den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{UW}$ ein und zeichnet die Strecke $\overline{MP}$.

Aufgabe: **Jetzt ist zu zeigen, dass $\beta = \gamma = 90^\circ$.**

Lösung: Die Dreiecke ΔUMP und ΔMWP sind wegen (SSS) kongruent, denn sie haben $|\overline{UM}|=|\overline{WM}|=t$, $|\overline{MP}|$ und $|\overline{UP}|=|\overline{WP}|=r$ gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\beta = \gamma$.
Da β und γ Nebenwinkel sind, gilt wegen Satz 2.6 $\beta + \gamma = 180^\circ$.
Aus beiden Gleichungen folgt, dass $\beta = \gamma = 90^\circ$ ist.
Das war zu zeigen.

Kapitel 6 : Sätze über das allgemeine Dreieck

Bem. 6.1 *Der Satz 3.17 über die Summe der Innenwinkel beim Dreieck soll jetzt durch vier Sätze ergänzt werden.*

Wenn man aber von diesem Kapitel nur Def. 6.6 , Def. 6.12 , Def. 6.18 , Def. 6.22 liest, kann man die folgenden Kapitel verstehen.

Satz 6.2 Bei jedem Dreieck ΔABC

a) schneiden sich die 3 Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ in einem gemeinsamen Punkt M.

b) Dieser Punkt M ist der Mittelpunkt des Umkreises k , der durch die Punkte A, B und C verläuft.

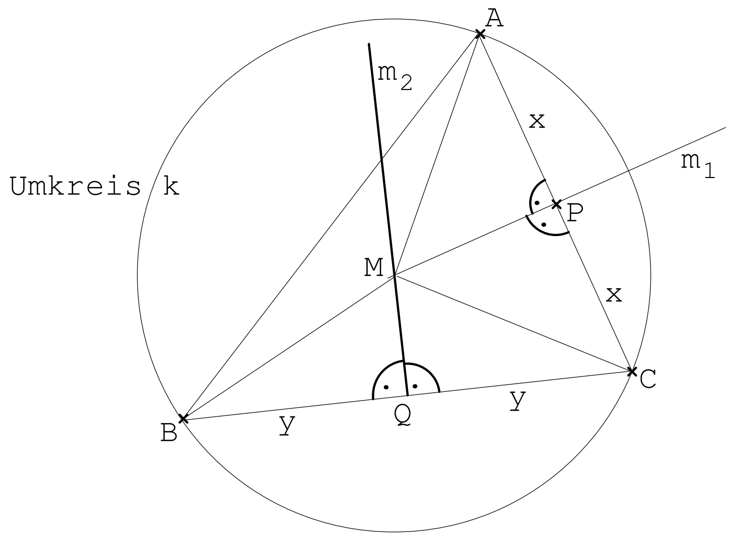
Bew. Hier macht schon die Beweisskizze Schwierigkeiten:

Zeichnet man nämlich drei Mittelsenkrechten ein, die sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden, so enthält die Beweisskizze schon die Behauptung des Satzes 6.2a).
Dann ist ein exakter Beweis nicht mehr möglich.

Zeichnet man aber drei Mittelsenkrechte ein, die sich nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden, so macht die falsche Beweisskizze einen Beweis ebenfalls unmöglich.

Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten findet man, indem man zunächst nicht mit drei Mittelsenkrechten arbeitet, sondern nur mit zweien, beispielsweise mit m_1 und m_2 .

Diese schneiden sich, da sie nicht parallel sein können. Der Schnittpunkt erhält den Namen M.



Da der Teil a) des Satzes so große Probleme bereitet, beginnt man besser mit dem Beweis des Teiles b) .

b) Die Behauptung b) besagt, dass M von A, B und C den gleichen Abstand hat. Also
ist zu zeigen, dass |MA| = |MB| = |MC| ist.
Um die Kongruenzsätze benutzen zu können, benötigt man Dreiecke. Also verbindet man M mit A, B und mit C.
Die Dreiecke ΔAMP und ΔCPM sind wegen (SWS) kongruent, denn sie haben |MP|, x und den rechten Winkel gemeinsam.

Wegen dieser Kongruenz ist

6.3 $|\overline{AM}| = |\overline{CM}|$.

Außerdem sind die Dreiecke ΔMBQ und ΔQCM wegen (SWS) kongruent, denn sie haben $|\overline{QM}|$, y und den rechten Winkel gemeinsam. Wegen dieser Kongruenz ist

6.4 $|\overline{CM}| = |\overline{BM}|$.

Aus 6.3 und 6.4 folgt $|\overline{AM}| = |\overline{BM}| = |\overline{CM}|$.

Damit ist der Teil b) von Satz 6.2 bewiesen.

Jetzt muss noch der Teil a) von Satz 6.2 bewiesen werden.

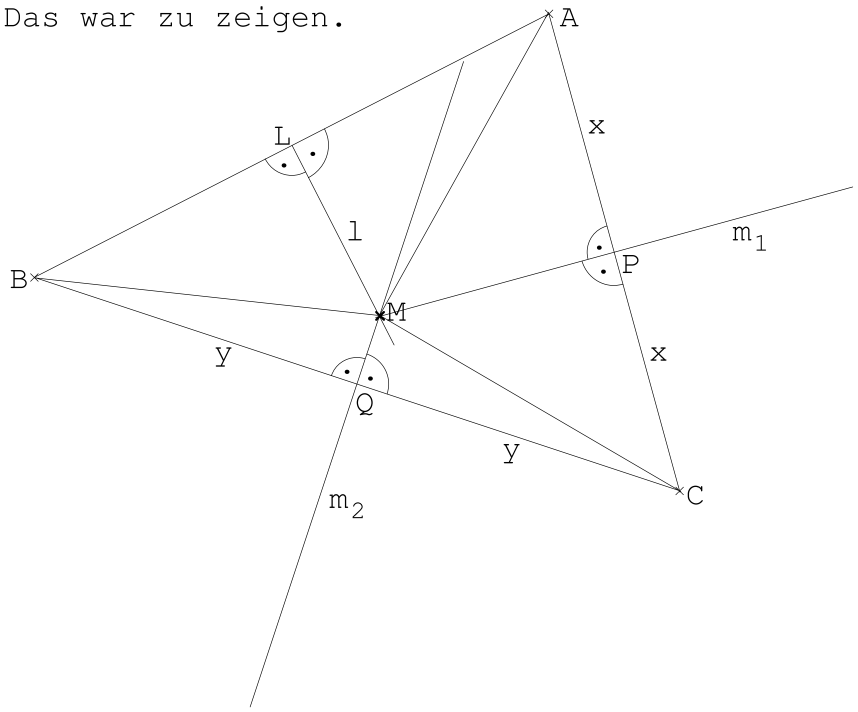
Um weitere kongruente Dreiecke zu erhalten, zeichnet man das Lot l von M auf die Gerade AB. Der Lotfußpunkt erhält den Namen L. Zu zeigen bleibt, dass l die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist. Da das Lot den rechten Winkel erzeugt, **bleibt zu zeigen, dass $|\overline{BL}| = |\overline{AL}|$ ist.**

Man sucht wieder kongruente Dreiecke:

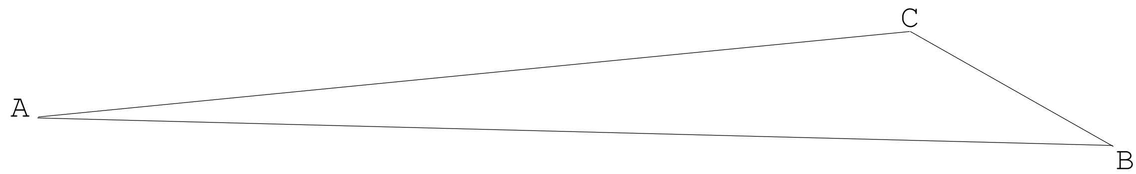
Die Dreiecke ΔBML und ΔMAL sind wegen (SsW) kongruent, denn sie haben $|LM|$, $|MB|=|MA|$ und den rechten Winkel gemeinsam.

Aus der Kongruenz folgt, dass $|\overline{BL}| = |\overline{AL}|$ ist.

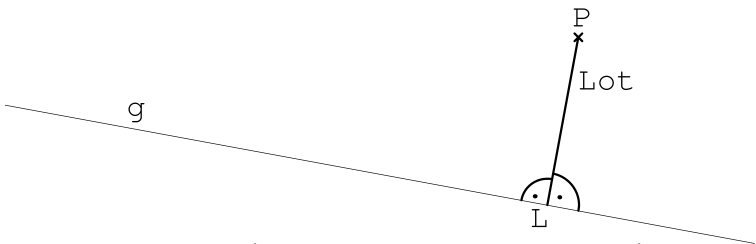
Das war zu zeigen.



Aufgabe 6.5 *Beweise den Satz 6.2 für dieses Dreieck:*
(Der Schnittpunkt der 3 Mittelsenkrechten liegt hier unterhalb des Dreieckes.)



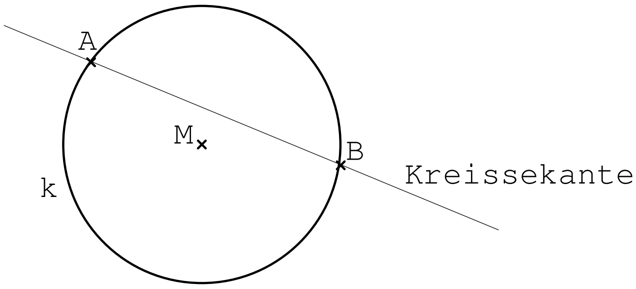
Def. 6.6 Den **Abstand eines Punktes von einer Geraden** erhält man folgendermaßen:
Man konstruiert das Lot vom Punkt P auf die Gerade g und erhält so den **Lotfußpunkt**, den man L nennt .
Der gesuchte **Abstand** ist dann die Strecke $|\overline{PL}|$.



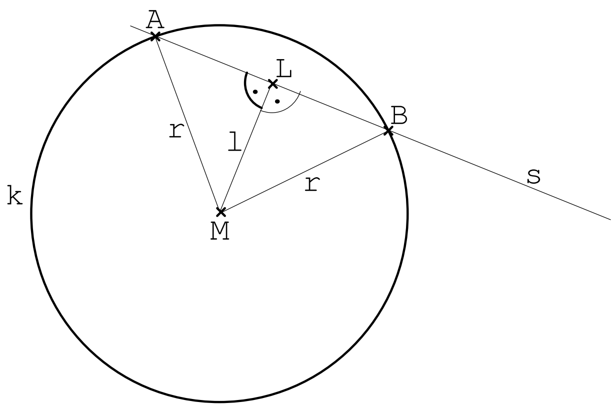
Bem. 6.7 *Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g ist offenbar der kürzeste Abstand, den ein Punkt P von g haben kann.*

Bem. 6.8 *Da es im nächsten Satz auch um eine Kreistangente geht, muss zunächst die Kreissekante untersucht werden.*

Def. 6.9 Eine **Kreissekante** ist eine Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet.



Satz 6.10 Wird ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M von einer Sekante s in den Punkten A und B geschnitten, so ist das Lot l von M auf s die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.

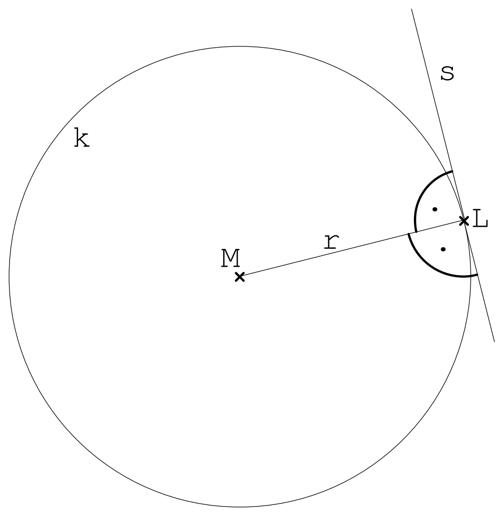


Bew.:

Aufgabe **Zu zeigen bleibt**, dass $|\overline{AL}| = |\overline{BL}|$.

Lösung Wegen (SsW) sind die Dreiecke ΔMLA und ΔMBL kongruent, denn sie haben r, l und den rechten Winkel gemeinsam. Wegen dieser Kongruenz ist $|\overline{AL}|=|\overline{BL}|$. Das war zu zeigen.

Bem. 6.11 *Während bis jetzt in fast allen Beweisen die Kongruenzsätze verwendet wurden, wird nun ein Grenzübergang benutzt: (Das ist ein Verfahren aus der Differential- und Integralrechnung.)*
Entfernt sich die Sekante s immer mehr vom Mittelpunkt M des Kreises k, so bewegen sich die Punkte A und B immer mehr aufeinander zu. Der Punkt L bleibt dabei in der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ und der rechte Winkel bleibt erhalten.
Hat der Punkt L schließlich den Kreis k erreicht, so fallen die Punkte A, B und L zusammen, aber der rechte Winkel bleibt erhalten.
Dann hat die Gerade s von M den Abstand r.(Vgl. 6.6)



So kommt man zu der

Definition 6.12 Ein Kreis k hat den Mittelpunkt M und den Radius r. Eine Gerade t, die von M den Abstand r hat, heißt **Tangente an den Kreis k.**

Bem. 6.13 *Das Wort Tangente kommt aus dem Lateinischen von tangere (berühren), das Wort Sekante von secare (schneiden).*

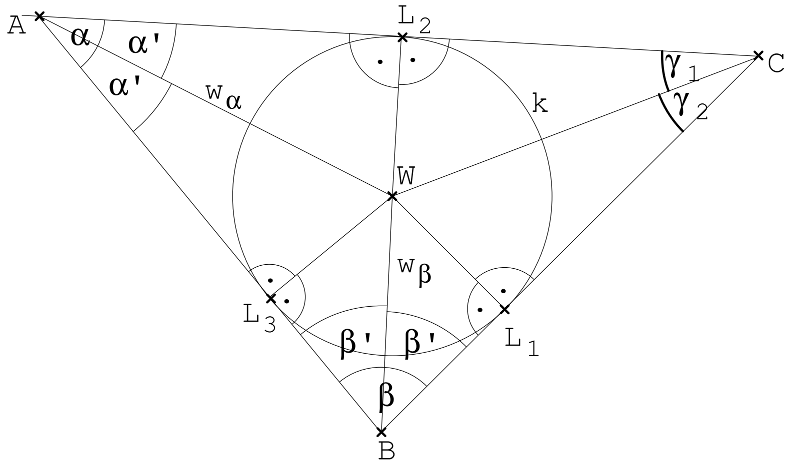
Bem. 6.14 *Jetzt erhält man einen Satz, der dem Satz 6.2 über die 3 Mittelsenkrechten eines Dreiecks sehr ähnlich ist:*

Satz 6.15 Bei einem Dreieck ΔABC

a) schneiden sich die 3 Winkelhalbierenden der Winkel α, β, γ in einem gemeinsamen Punkt W.

b) Dieser Punkt W ist der Mittelpunkt des Inkreises k, für den die 3 Dreiecksseiten Tangenten sind.

Bew.: Auch hier macht die Beweisskizze Schwierigkeiten. Daher arbeitet man ähnlich wie beim Beweis von Satz 6.2 zunächst nur mit 2 Winkelhalbierenden, z.B. w_α und w_β. Man nennt ihren Schnittpunkt W und beginnen mit dem
Beweis des Teiles b).
Wenn W der Mittelpunkt eines Kreises k ist, für den die Dreiecksseiten Tangenten sind, müssen die 3 Seiten des Dreiecks von M den gleichen Abstand haben. Wegen Def. 6.6 muss man die 3 Lote von W aus auf die Dreiecksseiten einzeichnen. Die Lotfußpunkte nennt man L_1, L_2 und L_3.
Zu zeigen bleibt, dass $|\overline{WL_1}| = |\overline{WL_2}| = |\overline{WL_3}|$.
Dafür sucht man Paare kongruenter Dreiecke:
Das Dreieck ΔWL_2A ist wegen (SWW) kongruent zum Dreieck ΔWAL_3,



denn beide Dreiecke haben $|\overline{AW}|$, α' und den rechten Winkel gemeinsam. Aus dieser Kongruenz folgt, dass

6.16 $|\overline{WL_2}| = |\overline{WL_3}|$ ist.

Außerdem ist das Dreieck ΔBWL_3 wegen (SWW) kongruent zum Dreieck ΔWBL_1, denn beide Dreiecke haben $|\overline{BW}|$, β' und den rechten Winkel gemeinsam. Aus dieser Kongruenz folgt, dass

6.17 $|\overline{WL_3}| = |\overline{WL_1}|$ ist.

Aus 6.16 und 6.17 folgt $|\overline{WL_2}|=|\overline{WL_3}|=|\overline{WL_1}|$.
Also haben die 3 Dreiecksseiten von W den gleichen Abstand. Wählt man diesen Abstand als Radius r des Kreises k mit dem Mittelpunkt W, so ist Teil b) bewiesen.

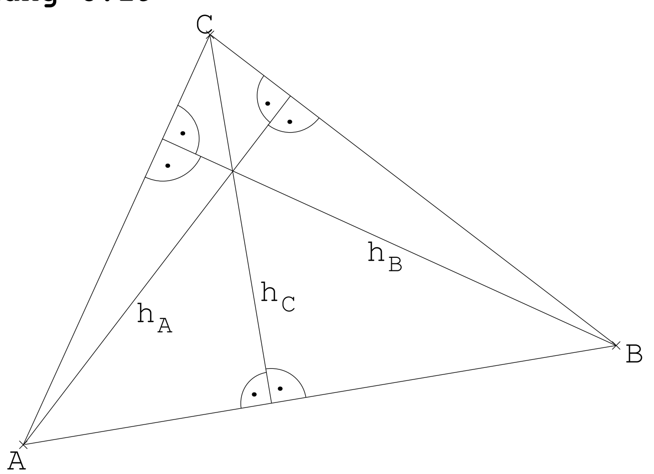
Jetzt muss noch der **Teil a)** der Behauptung bewiesen werden:
Um noch ein weiteres Paar kongruenter Dreiecke zu erhalten, zeichnet man die Strecke $\overline{WC}$ ein. Zu zeigen bleibt, dass $\overline{WC}$ (ebenso wie $\overline{WA}$ und $\overline{WB}$) auch eine Winkelhalbierende ist.

Aufgabe: **Man muss also zeigen, dass $\gamma_1 = \gamma_2$ ist.**

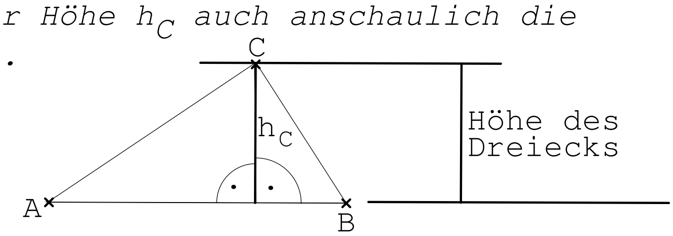
Lösung: Man findet ein Paar kongruenter Dreiecke:
Das Dreieck ΔWCL_2 ist wegen (SsW) kongruent zum Dreieck ΔCWL_1 ,denn beide Dreiecke haben $|WC|$, $|WL_1|=|WL_2|$ und den rechten Winkel gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\gamma_1 = \gamma_2$. Das war zu zeigen.

Def. 6.18 In einem Dreieck ist eine **Höhe** das Lot von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite.
Man hat die 3 Höhen h_A , h_B und h_C .

Zeichnung 6.19



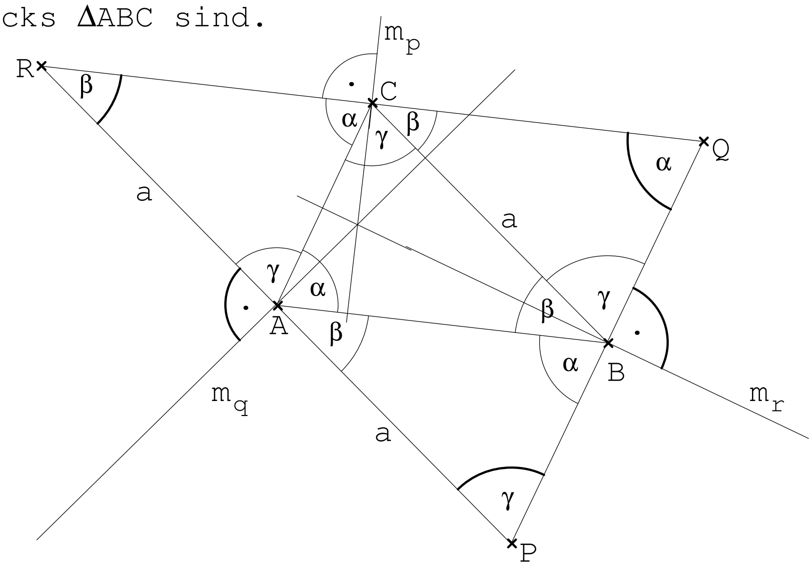
Bem. 6.20 *Liegt bei einem Dreieck die Seite $\overline{AB}$ waagrecht, so ist die Länge der Höhe h_C auch anschaulich die "Höhe des Dreiecks".*



Auf Grund der Zeichnung 6.19 vermutet man:

Satz 6.21 Bei jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt H.

Bew.: In diesem Beweis werden nicht die Kongruenzsätze benutzt, sondern man arbeitet hier mit einem Trick: Man geht aus von einem beliebigen Dreieck ΔABC und zeichnet das Dreieck 4 mal, so dass eine neue Figur entsteht. Anscheinend sind die Punkte P, Q, R Eckpunkte eines neuen Dreiecks, dessen Mittelsenkrechten die Höhen des Dreiecks ΔABC sind.



Zunächst ist **zu zeigen, dass A auf der Geraden PR liegt.** Für die Innenwinkel des Dreiecks ΔABC gilt (Satz 3.17) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Diese Winkel liegen aber auch bei A. Damit ist die Gerade AP = AR = PR. Also liegt der Punkt A auf der Geraden PR. Ebenso zeigt man, dass B auf PQ und C auf QR liegt.

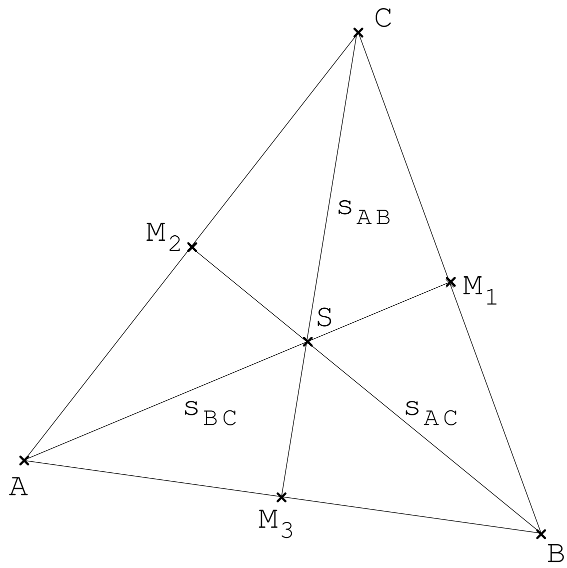
Jetzt bleibt **zu zeigen, dass die Mittelsenkrechte m_r die Höhe h_B ist.**

Die Gerade AC ist parallel zur Geraden PQ, denn beide Geraden haben den gleichen Stufenwinkel α (Def.3.6). Deshalb steht die Mittelsenkrechte m_r der Strecke $\overline{PQ}$ auch senkrecht zur Geraden AB. Außerdem liegt B auf m_r. Damit ist $m_r = h_B$. Ebenso zeigt man, dass $m_p = h_C$ und dass $m_q = h_A$ ist.

Da sich die 3 Mittelsenkrechten nach Satz 6.2 in einem gemeinsamen Punkt schneiden, müssen sich auch die 3 Höhen in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Def. 6.22 In einem Dreieck verläuft eine **Seitenhalbierende** durch einen Eckpunkt und durch die Mitte der gegenüberliegenden Seite.

Zeichnung 6.23



Auf Grund der Zeichnung vermutet man:

Satz 6.24 In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt.

Ohne Beweis

Da der Beweis dieses Satzes relativ schwierig ist, wird er hier ausgelassen, denn er kann nicht deutlich machen, wie ein "normaler Mensch" einen Beweis erfindet.

Bem. 6.25 **Zusammenfassung** *In jedem Dreieck schneiden sich*

a) die drei Mittelsenkrechten
b) die drei Winkelhalbierenden
c) die drei Höhen
d) die drei Seitenhalbierenden

jeweils in einem gemeinsamen Punkt. Diese 4 Punkte aus a),b),c),d) sind im Allgemeinen verschieden.

In a) erhält man den Mittelpunkt des Umkreises, der durch die Eckpunkte des Dreiecks verläuft.
In b) erhält man den Mittelpunkt des Inkreises, für den die Dreiecksseiten Tangenten sind.
In d) erhält man den Schwerpunkt des Dreiecks. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2.

Kapitel 7 Spezielle Dreiecke

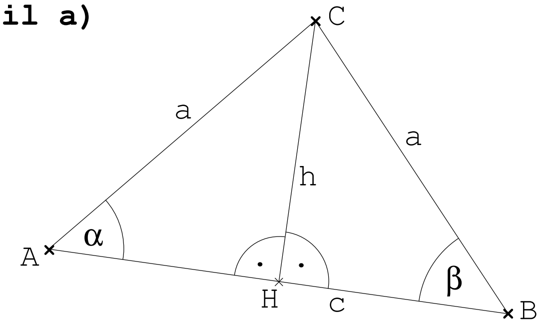
Def. 7.1 Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die dritte Seite heißt dann **Basis.**

Satz 7.2 **a)** Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind beide Winkel an der Basis gleich groß.

b) Wenn bei einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig. Die Basis liegt zwischen den beiden Winkeln.

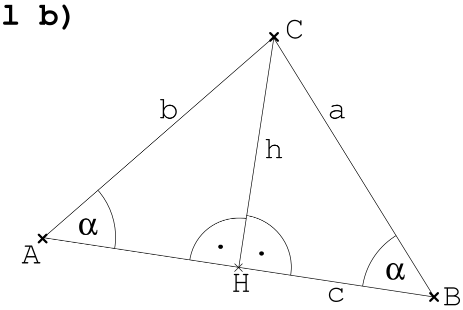
(Hier lässt sich eine wenn–dann–Aussage umkehren.)

Bew.: Teil a)



Man geht von einem gleichschenkligen Dreieck aus. Zwei Seiten sind also gleich groß. Man nennt sie a. Die Basis heißt c. Um kongruente Dreiecke zu erhalten, zeichnet man die Höhe h (von C aus) ein und nennt den Höhenfußpunkt H.
Die Dreiecke ΔAHC und ΔBCH sind wegen (SsW) kongruent, denn sie haben die Seite a, die Höhe h und den rechten Winkel gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\alpha = \beta$. Das war zu zeigen.

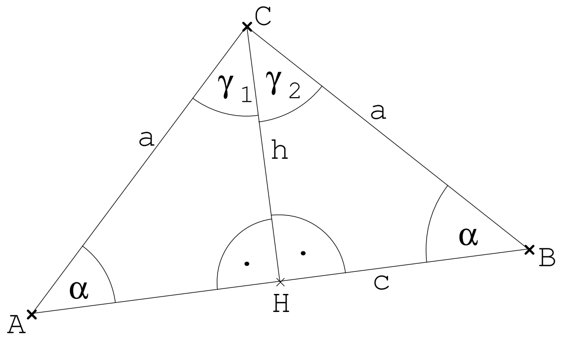
Teil b)



Man geht von einem Dreieck aus, bei dem zwei Winkel gleich groß sind. Man nennt sie α. Um kongruente Dreiecke zu erhalten, zeichnet man die Höhe h ein.
Die Dreiecke ΔAHC und ΔBCH sind wegen (WWS) kongruent, denn sie haben den Winkel α, den rechten Winkel und die Höhe h gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz gilt a = b, also ist das Dreieck gleichschenklig. Das war zu zeigen.

Satz 7.3 Bei jedem gleichschenkligen Dreieck fallen über der Basis Seitenhalbierende, Höhe, Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte zusammen.

Bew.:



Man zeichnet ein gleichschenkliges Dreieck. Die beiden gleichen Seiten nennt man a, die beiden gleichen Winkel α. (Vgl. Satz 7.2a)
Um kongruente Dreiecke zu erhalten, wird wieder die Höhe h mit dem Höhenfußpunkt H eingezeichnet.
Die Dreiecke ΔAHC und ΔBCH sind wegen (WWS) kongruent, denn sie haben den Winkel α, den rechten Winkel und die Höhe h gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist
$|\overline{AH}| = |\overline{HB}|$. Also ist die Höhe h auch Mittelsenkrechte und Seitenhalbierende.
Wegen dieser Kongruenz ist auch $\gamma_1 = \gamma_2$.
Also ist die Höhe h Winkelhalbierende.
Das war zu zeigen.

Def. 7.4 Bei einem **gleichseitigen Dreieck** sind alle Seiten gleich lang.

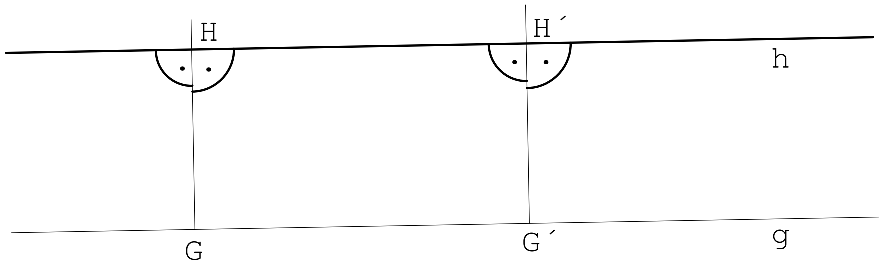
Satz 7.5 Bei jedem gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen, Seitenhalbierenden, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden über jeder Dreiecksseite zusammen.

Bew. Jede Dreiecksseite ist beim gleichseitigen Dreieck Basis eines gleichschenkligen Dreiecks. Deshalb folgt aus Satz 7.3 die Behauptung.

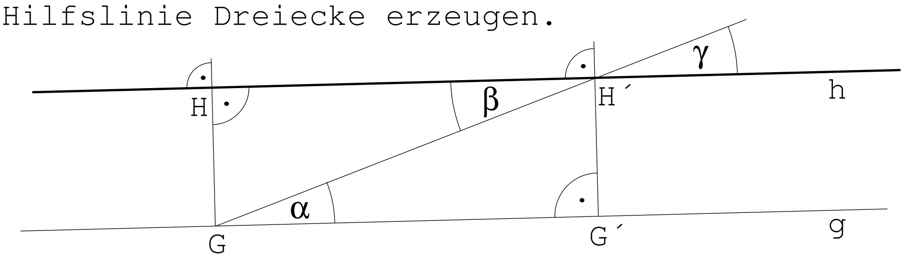
Kapitel 8 : Der Abstand paralleler Geraden

Satz 8.1 : Zwei parallele Geraden haben überall den gleichen Abstand.

Bew. : Gegeben sind 2 parallele Geraden g und h und 2 Punkte G und G´ auf g.
Zu zeigen ist jetzt:
G und G´ haben von h den gleichen Abstand.
Wegen Def. 6.6 zeichnet man die Lote von G und G´ auf h und nennt die Lotfußpunkte H und H´.



Zu zeigen ist, dass $|\overline{HG}| = |\overline{H'G'}|$.
Aussagen über Längen erhält man durch die Kongruenzsätze. Diese gelten nur für Dreiecke. Also muss man bei der Beweisskizze durch eine Hilfslinie Dreiecke erzeugen.



Der rechte Winkel bei G´ ist der Stufenwinkel zu dem rechten Winkel bei H´. Deswegen sind beide Winkel bei parallelen Geraden g und h gleich.
Die Dreiecke $\Delta GH'H$ und $\Delta GG'H'$ sind anscheinend kongruent, denn sie haben $\overline{GH'}$ und den rechten Winkel gemeinsam. Es fehlt aber eine 3. gemeinsame Größe.

Aufgabe: So wird **zunächst einmal gezeigt, dass $\alpha = \beta$ ist.**

Lösung: Die Geraden g und h sind parallel. Deswegen gilt gemäß Axiom 2 für die Stufenwinkel α und γ

8.2 $\alpha = \gamma$.

Für die Scheitelwinkel β und γ gilt gemäß Satz 2.11

8.3 $\gamma = \beta$.

Wegen 8.2 und 8.3 gilt

8.4 $\alpha = \beta$.

Damit sind die beiden Dreiecke $\Delta GG'H'$ und $\Delta HGH'$ wegen (WSW) kongruent, denn sie haben $|\overline{GH'}|$, $\alpha=\beta$ und die rechten Winkel gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $|\overline{GH}| = |\overline{G'H'}|$.
Das war zu zeigen.

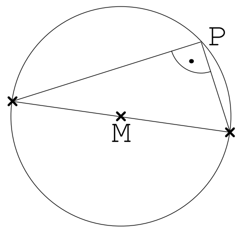
Def. 8.5 : Dieser (senkrechte) Abstand $|\overline{GH}|$, der bei parallelen Geraden an jeder Stelle gleich groß ist, heißt **Abstand der beiden parallelen Geraden** g und h.

Bem. 8.6 : *Da 2 parallele Geraden überall den gleichen Abstand haben, können sie sich niemals schneiden. Denn wenn sie sich schneiden würden, hätten sie am Schnittpunkt den Abstand Null.*

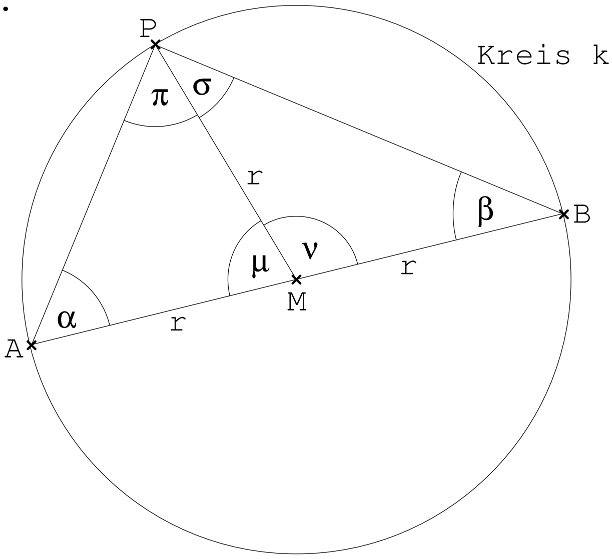
Bem. 8.7 : ***Wenn man das Kapitel 9 nicht durcharbeitet, kann man die folgenden Kapitel verstehen.***

Kapitel 9 Zwei Sätze über den Kreis

Satz 9.1 **(Satz des Thales)** Zeichnet man ein Dreieck aus den Endpunkten eines Kreisdurchmessers und einem weiteren Punkt P des Kreises, so hat das Dreieck bei P einen rechten Winkel.



Bew.



Wenn man mit Kreisen arbeitet, zeichnet man häufig Kreisradien ein. Also zeichnet man die Strecke $\overline{PM}$. Man erhält so offensichtlich keine Paare kongruenter Dreiecke, aber zwei gleichschenklige Dreiecke, nämlich ΔAMP und ΔMBP. Nach Satz 7.2 ist dann

9.2 $\alpha = \pi$ und $\beta = \sigma$.

Nach Satz 3.17 (über die Innenwinkel im Dreieck) gilt

9.3 $\alpha + \mu + \pi = 180^\circ$ und

9.4 $\beta + \sigma + \nu = 180^\circ$.

Nach Satz 2.6 (über Nebenwinkel) gilt

$\mu + \nu = 180^\circ$ oder

9.5 $180^\circ = \mu + \nu$.

Addiert man die Gleichungen 9.3 , 9.4 und 9.5 , so erhält man auf der linken Seite der neuen Gleichung

$\alpha + \mu + \pi + \beta + \sigma + \nu + 180^\circ =$ und auf der rechten Seite $360^\circ + \mu + \nu$

Ersetzt man wegen 9.2 α durch π und β durch σ , so folgt

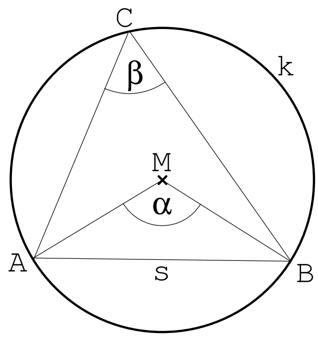
$2\pi + 2\sigma + \mu + \nu + 180^\circ = \mu + \nu + 360^\circ$.

Subtrahiert man $(\mu + \nu + 180^\circ)$ von beiden Seiten der Gleichung, so ergibt sich $2\pi + 2\sigma = 180^\circ$.

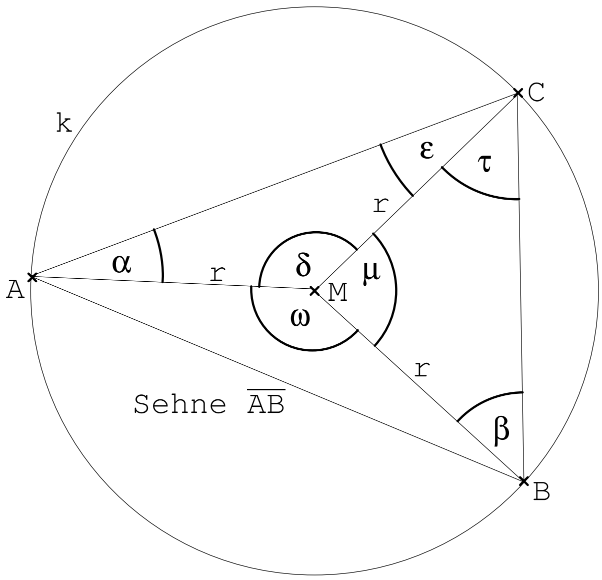
Dividiert man schließlich diese Gleichung durch 2, so folgt $\pi + \sigma = 90^\circ$. Das war zu zeigen.

Satz 9.6 (über Mittelpunktswinkel und Umfangswinkel)

Eine Kreissehne s hat die Endpunkte A und B. Verbindet man diese mit dem Kreismittelpunkt M, so erhält man ein erstes Dreieck ΔABM. Verbindet man A und B mit einem beliebigen Punkt C des Kreises k, so erhält man ein zweites Dreieck ΔABC.
Dann ist der Innenwinkel α von ΔABM bei M doppelt so groß wie der Innenwinkel β von ΔABC bei C.



Bew.



Wie beim letzten Beweis zeichnet man auch bei k einen zusätzlichen Radius ein, nämlich $\overline{MC}$. So erhält man die drei gleichschenkligen Dreiecke ΔABM, ΔAMC, ΔBCM.
Wegen Satz 7.2 ist dann

9.7 $\alpha = \varepsilon$ und $\beta = \tau$.

Wegen Satz 3.17 (über Innenwinkel beim Dreieck) gilt

9.8 $\alpha + \delta + \varepsilon = 180^\circ$ und

9.9 $\beta + \mu + \tau = 180^\circ$. Außerdem hat man

$\delta + \omega + \mu = 360^\circ$ und damit auch

9.10 $360^\circ = \delta + \omega + \mu$.

Addiert man die Gleichungen 9.8 , 9.9 und 9.10 , so ergibt sich

$\alpha + \delta + \varepsilon + \beta + \mu + \tau + 360^\circ = \delta + \omega + \mu + 360^\circ$.

Ersetzt man in dieser Gleichung wegen 9.7 α durch ε und β durch τ, so erhält man

$\varepsilon + \delta + \varepsilon + \tau + \mu + \tau + 360^\circ = \delta + \omega + \mu + 360^\circ$.

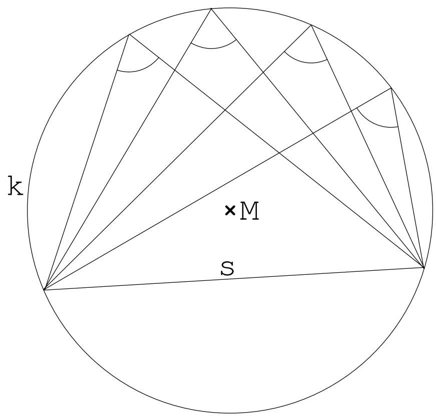
Subtrahiert man von dieser Gleichung $(\delta + \mu + 360^\circ)$, so ergibt sich

$2\varepsilon + 2\tau = \omega$. Durch Ausklammern von 2 erhält man

$2(\varepsilon + \tau) = \omega$. Das war zu zeigen.

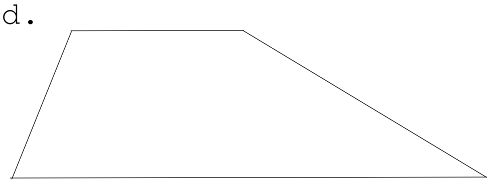
Def. 9.11 Der Winkel α bei M heißt **Mittelpunktswinkel**
der Winkel β am Kreis heißt **Umfangswinkel**.

Bem. 9.12 *Hat man bei einem Kreis k eine Sehne s, so sind wegen Satz 9.6 alle zugehörigen Umfangswinkel gleich groß.*

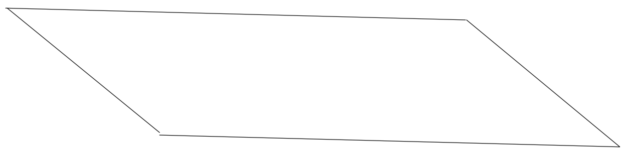


Kapitel 10 Vierecke

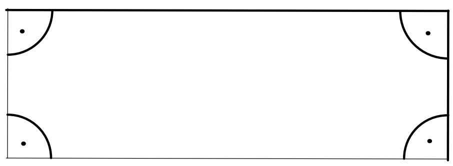
Def.10.1 Ein **Trapez** ist ein Viereck, bei dem mindestens zwei Seiten parallel sind.



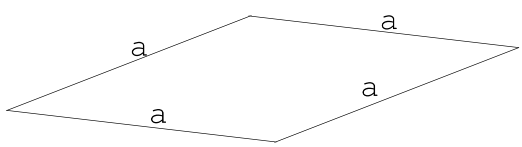
Def.10.2 Ein **Parallelogramm** ist ein Trapez, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.



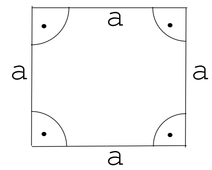
Def.10.3 **Ein Rechteck** ist ein Parallelogramm, bei dem alle Innenwinkel 90° haben.



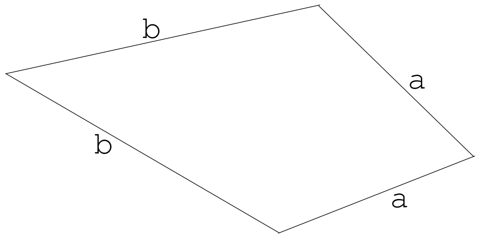
Def.10.4 Eine **Raute** ist ein Parallelogramm, bei dem alle Seiten gleich lang sind.



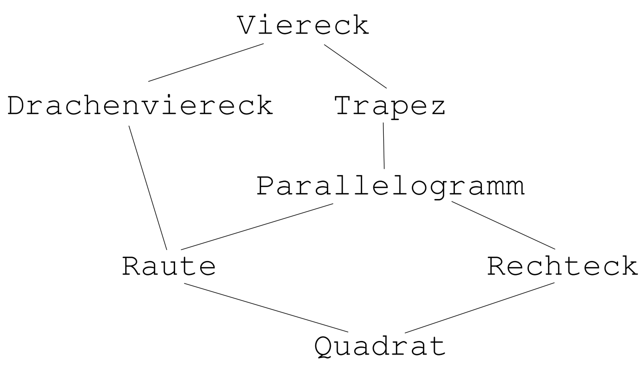
Def.10.5 Ein **Quadrat** ist eine Raute, die auch ein Rechteck ist.



Def.10.6 Ein **Drachenviereck** ist ein Viereck, bei dem 2 Paare benachbarter Seiten gleich lang sind.



Bem.10.7 *Die eben definierten Vierecke lassen sich in einem* ***Diagramm*** *darstellen.*



Wenn man im Diagramm von unten nach oben geht, gilt immer die Aussage: "Jede(s)... ist ein ..." .
z.B. gilt: Jedes Quadrat ist ein Rechteck, oder
Jede Raute ist ein Drachenviereck, usw. .
Diese insgesamt 17 Aussagen ergeben sich aus den Definitionen der Vierecke.

Bem.10.8 ***Wenn man die Kapitel 11, 12, 13 und 14 nicht durcharbeitet, kann man die folgenden Kapitel verstehen.***

Kapitel 11 Ein Satz über das Parallelogramm

Satz 11.1 Folgende 4 Aussagen sind gleichwertig:

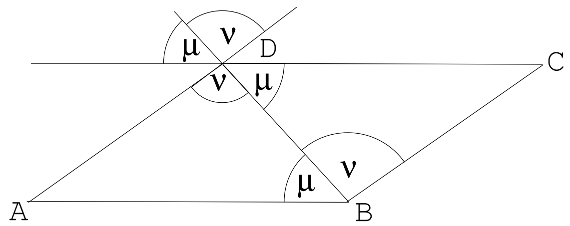
(a) Ein Viereck ist ein Parallelogramm.
(b) Je 2 gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
(c) Je 2 gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
(d) Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.

Beweis: Bevor man mit einem so umfangreichen Beweis beginnt, überlegt man sich am Besten zuerst eine Beweisstrategie:

$$(a) \to (b) \to (c) \to (a) \quad \text{und} \quad (b) \rightleftarrows (d)$$

Beweisteil (a)⇒(b)

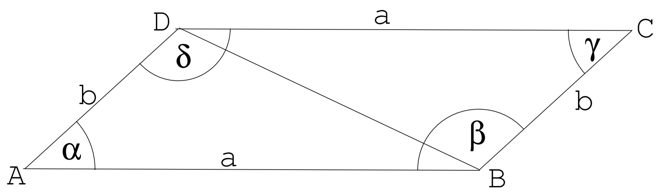
Man geht aus von (a). Nach 10.2 sind dann je 2 gegenüberliegende Seiten parallel.
Zunächst benötigt man eine Zeichnung. Man zeichnet eine Diagonale ein, damit man Kongruenzsätze anwenden kann.



Man verwendet hier Axiom 2 . Deshalb sind die beiden Stufenwinkel μ gleich groß und auch die beiden Stufenwinkel ν. Wegen 2.11 sind die beiden Scheitelwinkel μ gleich groß und auch die beiden Scheitelwinkel ν.
Nach diesen Vorüberlegungen kann man einen Kongruenzsatz anwenden:

ΔABD ist wegen (WSW) kongruent zu ΔBCD, denn die beiden Dreiecke haben ν, $\overline{BD}$ und μ gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\overline{AB} = \overline{DC}$ und $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Also sind die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang. Das ist die Aussage (b).

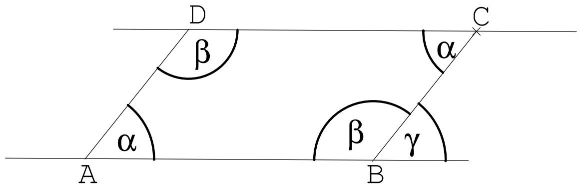
Beweisteil: b) ⇒ c)
Hier geht man aus von der
Aussage b): Je 2 gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
Zunächst macht man wieder eine Zeichnung.



Da die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind, erhalten sie gleiche Namen a und b.
Da es in der Aussage c) um Winkel geht, werden die Winkel α und γ eingezeichnet.
Jetzt kann man einen Kongruenzsatz anwenden:
Die Dreiecke ΔABD und ΔBCD sind wegen (SSS) kongruent, denn die beiden Dreiecke haben a, b und $\overline{BD}$ gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\alpha = \gamma$.
Entsprechend beweist man, dass $\beta = \delta$ ist.

Also sind gegenüberliegende Winkel gleich groß.(Aussage **(c)**).
Das war zu zeigen.

Beweisteil (c) ⇒ (a)   Man geht aus von
(c) Je 2 gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
Zunächst benötigt man wieder eine Zeichnung.



Weil die gegenüberliegenden Winkel jeweils gleich groß sind, erhalten sie gleiche Namen α und β.
Da man hier nur Aussagen über Winkel hat, versucht man mit dem Satz 3.20 weiter zu kommen.
Er besagt: Die Summe der Innenwinkel im Viereck beträgt 360°.
Das bedeutet hier $2\cdot\alpha + 2\cdot\beta = 360^\circ$.
Diese Gleichung teilt man durch 2 . Dann erhält man
$\alpha + \beta = 180^\circ$.
Andererseits gilt für Nebenwinkel $\gamma + \beta = 180^\circ$.
Wegen dieser beiden Gleichungen muss $\alpha = \gamma$ sein
Da α und γ Stufenwinkel an den Geraden AD und BC sind, müssen diese Geraden wegen Axiom 2 parallel sein.

Ebenso zeigt man, dass die Geraden AB und CD parallel sind.

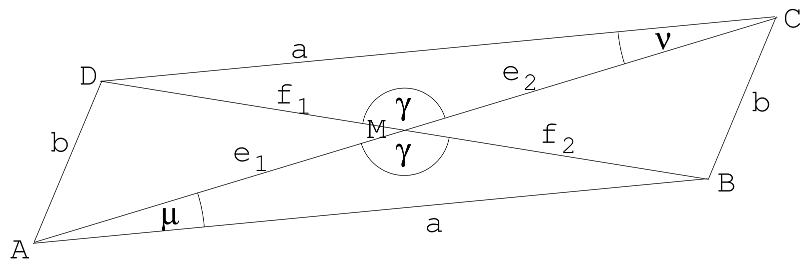
Insgesamt erhält man die Aussage
(a) Gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel.

Beweisteil (b) ⇒ (d)   Man geht aus von

(b) Je 2 gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

In der Zeichnung erhalten die gleich langen Seiten gleiche Namen a und b.

Da die beiden Diagonalen untersucht werden sollen, werden sie eingezeichnet.



Man kann jetzt in denjenigen Dreiecken, in denen e_1, e_2 und f_1, f_2 vorkommen, mit keinem Kongruenzsatz arbeiten, da diese Dreiecke nur in 2 Dreiecksgrößen übereinstimmen. Deshalb sucht man sich zunächst andere kongruente Dreiecke:

Das Dreieck ΔABC ist wegen (SSS) kongruent zum Dreieck ΔCDA, denn die Dreiecke haben a, b und $\overline{AC}$ gemeinsam. Wegen dieser Kongruenz ist $\mu = \nu$.

Jetzt kann man die Dreiecke untersuchen, auf die es hier ankommt.

Aufgabe: **Zu zeigen ist**, dass $e_1 = e_2$ und $f_1 = f_2$.

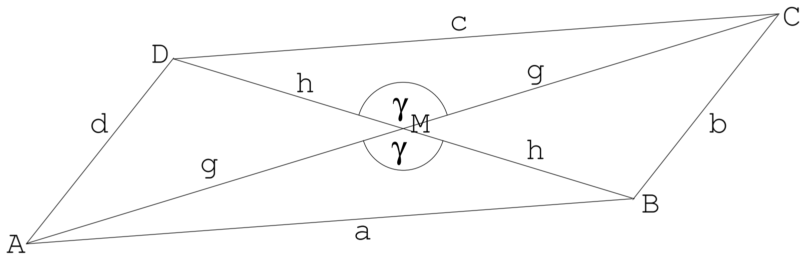
Lösung: Das Dreieck ΔABM ist wegen (WSW) kongruent zum Dreieck ΔCDM, denn beide Dreiecke haben die Scheitelwinkel γ, a und $\mu=\nu$ gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $e_1 = e_2$ und $f_1 = f_2$.
Also halbieren sich die Diagonalen (Aussage (d)).

Das war zu zeigen.

Beweisteil (d) ⇒ (b) **Man geht aus von**

(d) Die Diagonalen halbieren sich.

Man beginnt mit einer Zeichnung, bei der die gleich langen Diagonalenstücke und zwei Scheitelwinkel jeweils gleiche Namen erhalten.



Aufgabe: Zeige, dass $a = c$ ist.

Lösung:

Das Dreieck ΔABM ist wegen (SWS) kongruent zum Dreieck ΔCDM, denn die beiden Dreiecke haben g, γ und h gemeinsam. Wegen dieser Kongruenz ist $a = c$.

Aufgabe: Zeige, dass $d = b$ ist.

Also sind gegenüberliegende Seiten jeweils gleich lang (Aussage (**b**)).

Das war zu zeigen.

Damit wurde der gesamte Satz 11.1 bewiesen.

Bem. 11.2 *Die verwendete Beweisstrategie ist relativ kompliziert. Naheliegender wäre folgende Strategie:*

$$\begin{array}{ccc} (a) & \rightarrow & (b) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (d) & \leftarrow & (c) \end{array}$$

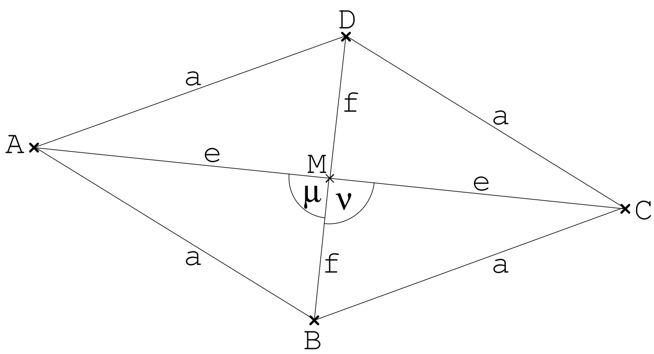
Sie wurde nicht gewählt, da der Beweisteil (d) → (a) zu schwierig ist.

Satz 12.1 (Ein Satz über die Raute)
Jede Raute ist ein Parallelogramm. Deshalb übertragen sich alle Eigenschaften
(a), (b), (c), (d) des Parallelogrammes
auf die Raute.
Dazu kommen noch **besondere Rauteneigenschaften:**

(e) Alle Seiten sind gleich lang.
(f) Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

Beweisstrategie: (e) ⇛ (f) und (f) ⇛ (e)

Beweisteil (e) ⇛ (f) **Man geht aus von**
(e) Alle Seiten sind gleich lang.
Man beginnt mit einer Zeichnung, bei der
die gleich langen Seiten und
die gleich langen Diagonalenstücke (Eigenschaft (d))
gleiche Namen erhalten.

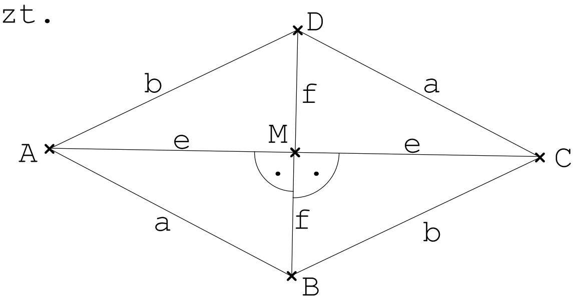


Jetzt kann man mit einem Kongruenzsatz arbeiten:

Das Dreieck ΔABM ist wegen (SSS) kongruent zum Dreieck ΔBCM, denn beide Dreiecke haben a, e und f gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\mu = \nu$.
Außerdem gilt für die Nebenwinkel μ und ν : $\mu + \nu = 180^\circ$
Deshalb muss $\mu = \nu = 90^\circ$ sein.
Also stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
Das war zu zeigen.

Beweisteil (f) ⇒ (e) **Man geht aus von**
(f) Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

Zunächst fertigt man eine Zeichnung an, bei der die rechten Winkel an den Diagonalen eingezeichnet werden. Außerdem werden die Parallelogrammeigenschaften (b) und (d) benutzt.

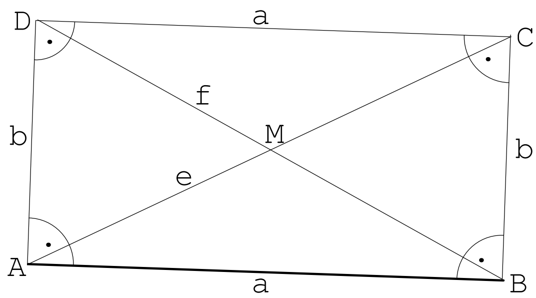


Aufgabe: Zeige, dass $a = b$ ist.
Lösung: Das Dreieck ΔABM ist wegen (SWS) kongruent zum Dreieck ΔBCM, denn beide Dreiecke haben e, f und den rechten Winkel gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $a = b$.
Also sind die Seiten gleich lang.
Das war zu zeigen.

Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm. Deswegen übertragen sich alle Eigenschaften (a), (b), (c) und (d) des Parallelogrammes auf das Rechteck.
Dazu kommen noch die **besonderen Rechteckseigenschaften**:
(g) Alle Innenwinkel sind rechte Winkel.
(h) Die Diagonalen sind gleich lang.

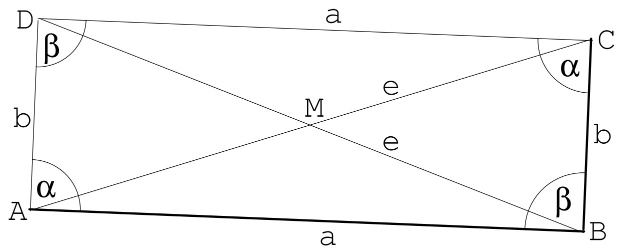
Beweisstrategie: (g) ⇛ (h) und (h) ⇛ (g).

Beweisteil (g) ⇛ (h) **Man geht aus von**
(g) Alle Innenwinkel sind rechte Winkel.
Man zeichnet ein Rechteck mit seinen Diagonalen, zeichnet die rechten Winkel ein und benutzt die Parallelogrammeigenschaft (b).



Aufgabe: Jetzt muss man zwei kongruente Dreiecke finden, von denen das eine die Diagonale e und das andere die Diagonale f enthält:
Lösung: Das Dreieck ΔABC ist wegen (SWS) kongruent zum Dreieck ΔABD , denn die Dreiecke haben
a, b und den rechten Winkel gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist e = f.
Damit sind die Diagonalen gleich lang. (Aussage (h)).
Das war zu zeigen.

Beweisteil (h) ⇛ (g)
Man geht davon aus, dass die Diagonalen gleich lang sind.((h))
Dann zeichnet man ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen e und benutzt die Parallelogrammeigenschaften (b)und (c).



Aufgabe: Zeige, dass $\alpha = \beta$ ist.
Lösung:
Das Dreieck ΔABC ist wegen (SSS) kongruent zum Dreieck ΔABD, denn beide Dreiecke haben a, b und e gemeinsam.
Wegen dieser Kongruenz ist $\alpha = \beta$.

Andererseits ist die Summe der Innenwinkel im Viereck $4 \cdot \alpha = 360^\circ$. Daraus folgt $\alpha = 90^\circ$.
Also sind alle Innenwinkel rechte Winkel. (Aussage **(g)**).
Das war zu zeigen.

Kapitel 14 : Ein Satz über das Quadrat

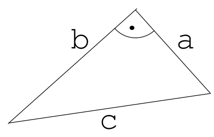
Jedes Quadrat ist gleichzeitig eine Raute und ein Rechteck.
Deswegen übertragen sich alle Eigenschaften
(a), (b), (c), (d), (e) und (f) der Raute und die
Zusatzeigenschaften (g) und (h) des Rechtecks
auf das Quadrat.

Kapitel 15 : Der Satz des Pythagoras

Bem.15.1 *Man kann dieses Kapitel nur verstehen, wenn man weiß, wie man Flächeninhalte von Quadraten und Dreiecken berechnet.*
Außerdem muss man die 1.Binomische Formel kennen.

Def.15.2 Ein **Dreieck** heißt **rechtwinklig**, wenn es einen rechten Innenwinkel hat.

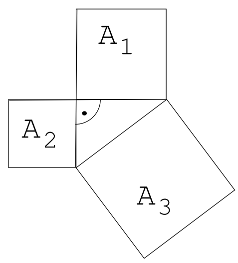
Def.15.3 In einem rechtwinkligen Dreieck heißt diejenige Dreiecksseite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, **Hypotenuse.**
Die anderen beiden Seiten heißen **Katheten.**



Bei diesem Dreieck ist c die Hypotenuse,
a und b sind die Katheten.

Satz 15.4 **(Satz des Pythagoras)**
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.
Im Dreieck von Def. 15.3 gilt dann $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$.

Bew. Die Ausdrücke a^2, b^2, c^2 können als Flächeninhalte von Quadraten aufgefasst werden.

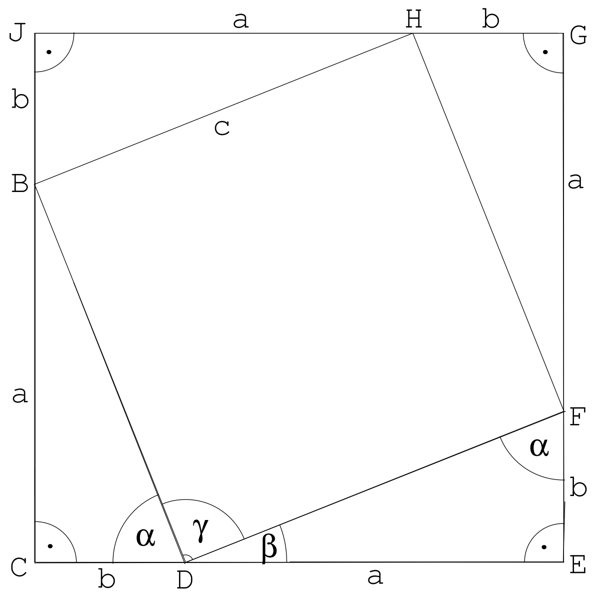


Dann lautet der Satz für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3

$$A_3 = A_1 + A_2 \quad .$$

Da die drei Quadrate voneinander entfernt sind, kommt man bei einem Beweis nicht gut weiter.
Daher legt man zwei Quadrate ineinander:

15.5



Man zeichnet ein (äußeres) Quadrat JCEG und, wie in der Skizze 15.5 , ein Viereck BDFH ein.
Zunächst soll **gezeigt werden**, dass das **Viereck BDFH ein Quadrat** ist.
Die 4 Dreiecke in den Ecken J, C, E, G sind wegen (SWS) kongruent, denn sie haben a, den rechten Winkel und b gemeinsam.
Deshalb haben die 4 Dreiecke die gleiche Hypothenuse c und die 3 Innenwinkel gemeinsam.
Also ist das Viereck BDFH eine Raute.
Am Punkt D sind die Winkel $(\alpha+\gamma)$ und β Nebenwinkel.
Deshalb gilt wegen Satz 2.6

15.6 $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$.

Außerdem gilt für das Dreieck ΔDEF wegen Satz 3.17

15.7 $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$.

Subtrahiert man 15.7 von 15.6 , so erhält man $\gamma - 90^\circ = 0^\circ$ und

15.8 damit $\gamma = 90^\circ$.

Also hat das Viereck BDFH 4 gleich große Seiten c und 4 rechte Innenwinkel.
Daher ist das Viereck BDFH ein Quadrat.

Der Flächeninhalt A des Vierecks JCEG ist

15.9 $A = (a + b)^2$.

Dieser Flächeninhalt lässt sich auch durch die Flächeninhalte des Quadrates BDFH und der 4 Dreiecke ausdrücken:

15.10 $A = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = c^2 + 2ab$.

Kombiniert man 15.9 mit 15.10 , so erhält man

15.11 $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$.

Benutzt man bei 15.11 die 1.Binomische Formel, so erhält man
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$.
Subtrahiert man 2ab von beiden Seiten der letzten Gleichung , so ergibt sich

15.12 $$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Das war zu zeigen.

Bem.15.13 *Ist a=3 und b=4 , so erhält man aus 15.12 c=5. Für a=5 und b=12 erhält man c=13.*

Aufgabe 15.14 *Suche weitere Zahlenpaare a und b, so dass c eine ganze Zahl ist. (sogenannte pythagoreische Zahlenpaare)*

Man kann den **Satz des Pythagoras umkehren.**

Satz 15.15 Für jedes Dreieck ΔABC gilt:
Wenn $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist $\gamma = 90^\circ$.

Ohne Beweis

Bem. 15.16 *Ist ein Dreieck nicht rechtwinklig, so gilt der Satz des Pythagoras nicht. Aber es gilt der*

Kosinussatz $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\gamma) \quad .$$

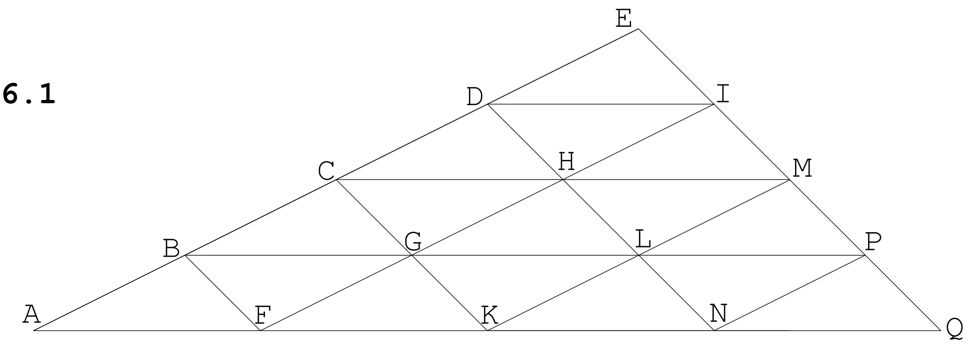
Der Ausdruck " $-2ab\cdot\cos(\gamma)$ " ergänzt den Satz des Pythagoras für den Fall, dass γ kein rechter Winkel ist.

Ist $\gamma = 90^\circ$, so ist $\cos(\gamma) = 0$ und damit

$-2ab\cdot\cos(\gamma) = 0$.
Damit wird aus dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2$.
Das ist der Satz des Pythagoras.

Kapitel 16 : Die Strahlensätze

Zeichnung 16.1



Diese Figur ist aus vielen kongruenten Dreiecken aufgebaut.

Daher gilt z.B. $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|EQ|}{|DN|} = \frac{|AQ|}{|AN|} = \frac{4}{3}$.

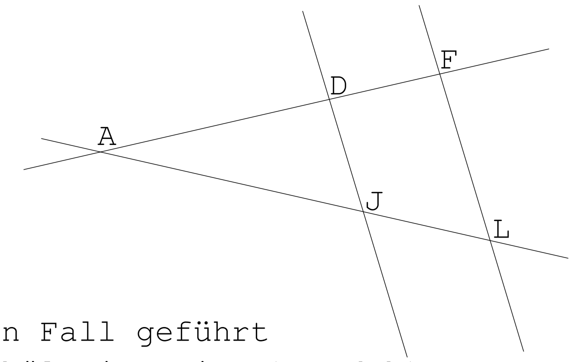
Das ist ein Beispiel für die Anwendung des Strahlensatzes
Die Figur 16.1 liefert eine Idee, wie man den Strahlensatz beweisen könnte.

16.2 Der Strahlensatz

Wird eine Geradenkreuzung von zwei parallelen Geraden geschnitten, so gilt

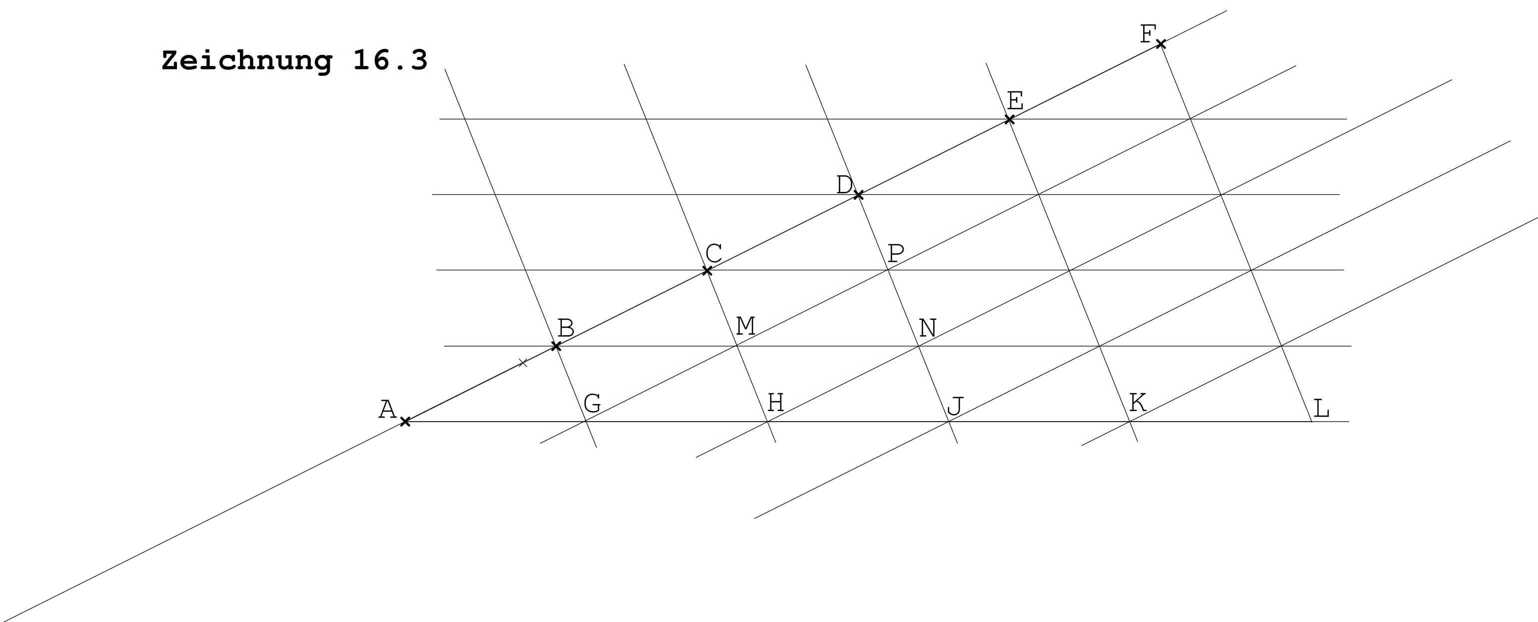
a) $$\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{AJ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{DJ}|}{|\overline{FL}|}$$

b) $$\frac{|\overline{DF}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{JL}|}{|\overline{AJ}|}$$



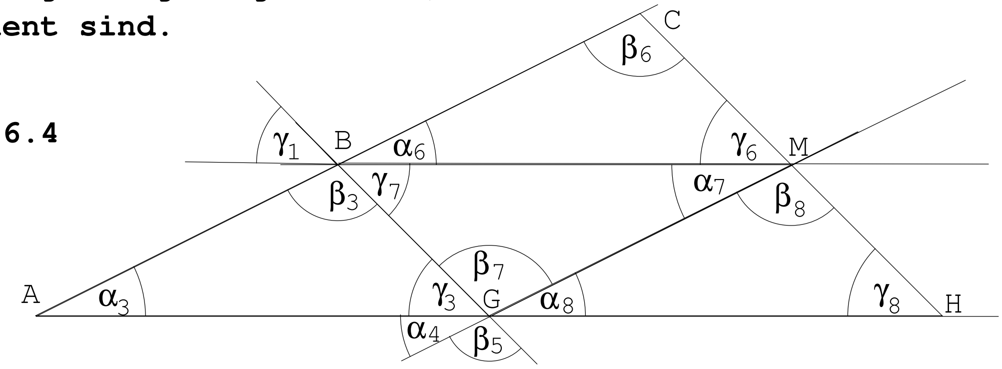
Bew. Der Beweis soll nur für den Fall geführt werden, dass die Zahlenverhältnisse in a) und b) Brüche sind, z.B. $\frac{3}{5}$.
Daher teilt man die Strecke $\overline{AF}$ in 5 gleiche Teile.

Zeichnung 16.3



Durch die Einteilung der Strecke $\overline{AF}$ in 5 gleiche Teile erhält man die Punkte B, C, D und E.
Durch diese Punkte werden die Parallelen zu $\overline{AL}$ und zu $\overline{FL}$ gezeichnet.
Außerdem werden noch Parallelen zu $\overline{AF}$ gezeichnet.
So entsteht die Zeichnung 16.3 mit vielen Dreiecken.
Es soll jetzt gezeigt werden, dass alle diese Dreiecke kongruent sind.

Zeichnung 16.4



Beweisstrategie :

1) Man bewegt sich von Dreieck zu Dreieck von unten nach oben und zeigt, dass diese Dreiecke alle kongruent sind.

Aufgabe: Zunächst wird gezeigt, dass das Dreieck ΔGHM kongruent zum Dreieck ΔBGM ist.

Lösung: Die Stufenwinkel α_4, α_7 an parallelen Geraden sind gleich.

16.5 $\alpha_4 = \alpha_7$.

α_4 und α_8 sind Scheitelwinkel. Also gilt

16.6 $\alpha_4 = \alpha_8$.

Aus 16.5 und 16.6 folgt, dass

16.7 $\alpha_7 = \alpha_8$.

Die Stufenwinkel β_5, β_8 an parallelen Geraden sind gleich.

16.8 $\beta_5 = \beta_8$.

β_5 und β_7 sind Scheitelwinkel. Also gilt

16.9 $\beta_5 = \beta_7$.

Aus 16.8 und 16.9 folgt, dass

16.10 $\beta_7 = \beta_8$.

Also sind die Dreiecke ΔGHM und ΔBGM wegen (WSW) kongruent, denn sie haben $\alpha_7 = \alpha_8$, $\beta_7 = \beta_8$ und $\overline{GM}$ gemeinsam.
Das war zu zeigen.

Aufgabe: Entsprechend zeigt man, dass die Dreiecke ΔBGM und ΔBMC kongruent sind.
Bewegt man sich weiter von unten nach oben durch die Dreiecke, so kann man ebenso zeigen, dass alle diese Dreiecke kongruent sind.

2) Nun bewegt man sich von Dreieck zu Dreieck von links nach rechts und zeigt, dass diese Dreiecke kongruent sind.

Aufgabe: Zunächst wird gezeigt, dass das Dreieck ΔAGB kongruent zum Dreieck ΔBGM ist.

Lösung: Die Stufenwinkel β_3, β_5 an parallelen Geraden sind gleich.

16.11 $\beta_3 = \beta_5$.

β_5 und β_7 sind Scheitelwinkel. Also gilt

16.12 $\beta_5 = \beta_7$.

Aus 16.11 und 16.12 folgt, dass

16.13 $\beta_3 = \beta_7$.

Die Stufenwinkel γ_1, γ_3 an parallelen Geraden sind gleich.

16.14 $\gamma_1 = \gamma_3$.

γ_1 und γ_7 sind Scheitelwinkel. Also gilt

16.15 $\gamma_1 = \gamma_7$.

Aus 16.14 und 16.15 folgt, dass

16.16 $\gamma_3 = \gamma_7$.

Also sind die Dreiecke ΔAGB und ΔGMB wegen (WSW) kongruent, denn sie haben $\beta_3 = \beta_7$, $\gamma_3 = \gamma_7$ und $\overline{GB}$ gemeinsam.
Das war zu zeigen.
Bewegt man sich weiter von links nach rechts durch die Dreiecke, so kann man ebenso zeigen, dass alle diese Dreiecke kongruent sind.

Daher ist

$$\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{AJ}|}{|\overline{AL}|} = \frac{|\overline{DJ}|}{|\overline{FL}|} = \frac{3}{5} \quad \text{und}$$

$$\frac{|\overline{DF}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{JL}|}{|\overline{AJ}|} = \frac{2}{3} \quad . \qquad \text{Das war zu zeigen.}$$

Aufgabe 16.17:

Zeige, dass die Dreiecke ΔBGM und ΔBMC kongruent sind.

Bem. 16.18 *Der Strahlensatz wurde hier nur für das Zahlenverhältnis $\frac{3}{5}$ bewiesen.*

Aber der allgemeine Beweis des Strahlensatzes kann fast genau so durchgeführt werden.

Nachwort

Ich habe mehr als 30 Jahre lang als Mathematiklehrer an zwei Gymnasien gearbeitet. Da die Geometrie-Beweise in den Schul-Lehrbüchern oft Mängel aufwiesen, habe ich einige Beweise nach meinen Vorstellungen umgearbeitet. Diese Ausarbeitungen habe ich hier zusammengestellt und ergänzt.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass man,
aufbauend auf nur 6 einfachen Axiomen und einigen Definitionen,
ein großes Gedankengebäude aufbauen kann.
Dabei wird ein sehr großer Teil der ebenen Geometrie exakt bewiesen und damit begründet.
Aber gerade weil das streng logische Denken hier sehr erfolgreich ist , muss man auch die Schwächen dieses Vorgehens ansprechen.
Zum Einen
ist die Auswahl der Axiome einigermaßen willkürlich. Legt man andere Axiome zu Grunde, so erhält man möglicherweise eine ganz andere Geometrie.
Auch wenn man außerhalb der Mathematik Beweise führt, muss man willkürlich Axiome zu Grunde legen. Diese heißen dann anders (z.B. Urteile der Bundesgerichte oder gesunder Menschenverstand oder ...) und entscheiden darüber, ob der jeweilige Beweis funktioniert.
Zum Anderen
kommt man in den wichtigsten Bereichen des menschlichen Lebens durch logisches Denken nicht weiter. Bei diesen wichtigen Bereichen geht es z.B. um Vertrauen, Hoffnung, Glaubwürdigkeit, Zuverlässigkeit, Sympathie, Liebe, Traurigkeit und Glücksgefühle, den Glauben an einen Gott oder
um den Glauben an einen persönlichen Gott, den man ansprechen kann.

Lippstadt, den 6.3.2018

Dr.rer.nat. W.Sewering